

Университет Дмитрия Пожарского

**Программа дисциплины**

**«*Геометрическая теория групп»***

**1. КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ КУРСА:**

Школьная программа в настоящее время сильно смещает акцент в сторону

формально-алгебраических конструкций и аналитических навыков. В то же

время, не менее важным (ровно столь же важным!) является понимание сути

математики - то есть её геометрического воплощения. В основе геометрии

как науки лежит парадигма ("Эрлангенская программа") Клейна, согласно

которой абстрактное понятие группы реализуется как конкретное понятие

множества симметрий некоторой геометрической фигуры, а всякая фигура

почти однозначно характеризуется своей группой симметрий. Таким образом,

наука геометрия - это изучение свойств фигур, инвариантных относительно

действия некоторой группы преобразований.

Приведём несколько примеров. Школьная геометрия занимается изучением

свойств фигур, инвариантных относительно группы движений: фигуры тогда

равны (по определению!), когда совмещаются движением, и именно свойства

фигур, сохраняющихся для равных фигур (углы, площади и длины) составляют

основной костяк школьной геометрии. Также в школе изучается отношение

подобия, то есть исследование свойств фигур, инвариантных относительно

группы подобий (гомотетий и их композиций с движениями). На первом курсе

Независимого Московского Университета изучаются также геометрические

свойства фигур на проективной плоскости, сфере и на плоскости Лобачевского.

Топология изучает свойства фигур, не меняющиеся при растяжениях любого

типа - то есть, при гомеоморфизмах (и даже более общих преобразований).

По сути дела, данный курс - это весьма конкретное введение в топологию

на основе нескольких аккуратно разобранных сюжетов.

**2. ПРЕРЕКВИЗИТЫ (наиболее важные приёмы и технические результаты,**

**которыми слушатели должны владеть на момент начала его освоения):**

По сути дела, требуется хорошее владение школьной программой, а также

уверенное владение навыками линейной алгебры (преобразования, базисы,

анализ действия заданного оператора и нормальные формы, выпуклость и

другие понятия линейной геометрии). Также предполагается хорошее знание

базовых конктрукций и научного языка, связанного с непрерывностью (начала

математического анализа): компактность, связность и основные теоремы про

поведение непрерывных функций на компактах.

**3. СООТНЕСЕНИЕ С ПРОГРАММАМИ ДРУГИХ ДИСЦИПЛИН:**

Начальные навыки абстрактной алгебры, полученные при изучении курса

дискретной математики и комбинаторики, помогут при анализе конкретных

групп, появляющихся в разбираемых сюжетах. Приёмы и методы, изученные

на занятиях по прикладной математике, также окажут помощь при явных

вычислениях, связанных с расслоением Хопфа и маломерными группами

вращений (а также при формульном задании кватернионов и октав).

Кроме того, содержание курса перекликается буквально со всеми курсами

физической линейки. Курс, помимо общекультурной составляющей, видится

как ступень на пути к освоению дифференциальной геометрии и динамических

систем, которые, в свою очередь, обогатят понимание продвинутой физики.

**4. ПОДРОБНОЕ ОПИСАНИЕ КУРСА (предварительный календарный план**

**занятий, примерные темы лекционных и семинарских пар, а также задач):**

НЕДЕЛЯ 1: ЛИКБЕЗЫ "ШКОЛЬНОЙ" ПРОГРАММЫ

Лекция 1. Классификация движений прямой и окружности. Глоссарий

Лекция 2. Теорема Шаля на плоскости. Арифметика движений. Подгруппы

Лекция 3. Комплексная геометрия и комплексное умножение

Лекция 4. Мозайки, укладки, узлы, зацепления. Язык начальной топологии

ЗАДАЧИ НА ПЕРВУЮ НЕДЕЛЮ:

1. Чему равняется композиция двух поворотов относительно различных

точек на плоскости? Опишите все варианты. Решите эту задачу на сфере.

2. Составьте таблицы композиции движений прямой, окружности, плоскости

и сферы. Докажите теорему Эйлера о том, что любое собственное движение

сферы является поворотом относительно некоторой оси.

3. Выведите все формулы школьной тригонометрии из свойств умножения

комплексных чисел. Задайте умножение компексных чисел на языке матриц.

4. У произвольного треугольника каждая сторона достроена до треугольника

равностороннего (для простоты, смотрящего "наружу" исходного треугольника).

Докажите, что центры построенных треугольников образуют равносторонний

треугольник (подсказка: чему может быть равна композиция трёх поворотов?).

5. Рассмотрим операции замыкания, а также взятия внутренности любого

множества на прямой или на плоскости. Какое максимальное количество

различных множеств можно получить из данного множества $A$, повторяя

в любом порядке эти процедуры? Докажите, что больше нельзя.

6. "Намотаем" полуинтервал на окружность. Является ли это отображение

непрерывным? Взаимно-однозначным? Гомеоморфизмом?

НЕДЕЛЯ 2: КОНЦЕПЦИЯ ИНВАРИАНТА: ПРИМЕРЫ И ОБОБЩЕНИЯ

Лекция 5. Об игре в 15 и других школьных задачах на нахождение инварианта

Лекция 6. Индекс числа оборотов векторного поля. Основная теорема алгебры

Лекция 7. Теорема Брауэра: несколько доказательств

Лекция 8. Эйлерова характеристика. Замощения плоскости и сферы

ЗАДАЧИ НА ВТОРУЮ НЕДЕЛЮ:

1. Нарисуйте на сфере векторное поле, имеющее единственную особую точку.

Отдельно нарисуйте топологическую картину поля вокруг этой особой точки.

(Подсказка: сфера - это "почти" плоскость, а на плоскости есть поле без нулей.)

2. Пускай замкнутые множества (на прямой, например) - это счётные и только

они (а также вся прямая). Докажите, что таким образом вводится некоторая

топология на прямой. Что означает сходимость последовательности в ней?

3. Верна ли теорема Брауэра на кресте (то есть на множестве, представляющем

собой объединение двух пересекающихся по внутренним точкам отрезков)?

4. Опишите, каким образом можно замостить плоскость копиями любого

треугольника, а также любого (даже и невыпуклого!) четырёхугольника. Также

приведите пример пятиугольника, копиями которого плоскость не замощается.

5. На основе предельного перехода и формулы Эйлера докажите, что плитки,

являющиеся выпуклыми многоугольниками с числом углов, бОльшим шести,

не могут годиться для замощения пола (плоскости).

6. Нарисуйте какой-нибудь многогранник на торе, бублике, сфере с данным

количеством ручек, и посчитайте Эйлерову характеристику поверхности.

НЕДЕЛЯ 3: РАССЛОЕНИЕ ХОПФА

Если добавить к трёхмерному пространству одну точку на бесконечности, то

получится трёхмерная сфера $S^3$. Памятуя об этом, выберем вертикальную

прямую и окружность, её опоясывающую. Станем постепенно ``наращивать''

вокруг нашей окружности всё более толстые торы, которые постепенно будут

заполнять всё трёхмерное пространство, за исключением выбранной прямой.

В конечном итоге торы будут всё более походить на опоясывающие именно

прямую, а не окружность, а с учётом бесконечной точки, они будут опоясывать

просто ещё одну окружность.

Далее, каждый тор является объединением семейства окружностей, каждая

из которых зацеплена с каждой, а также с исходной (и финальной). Теперь

сопоставим каждой точке сферы ту окружность, на которой она лежит

(бесконечной точке~--- вертикальную прямую, которая тоже окружность).

Получим знаменитое {\em расслоение Хопфа}.

Лекция 9. Гомотопические группы сфер (обзор достижений науки)

Лекция 10. Комплексная проективная плоскость: построение. Действие

группы поворотов на трёхмерной сфере, орбиты и факторпространство

Лекция 11. Описание расслоения Хопфа одной формулой. Геометрия

расслоения Хопфа: индекс зацепления любой пары окружностей

Лекция 12. Негомотопность расслоения Хопфа тривиальному отображению:

техника точных гомотопических последовательностей (ознакомительно)

ЗАДАЧИ НА ТРЕТЬЮ НЕДЕЛЮ:

1. Пользуясь теоремой Брауэра, выведите негомотопность тождественного

отображения многомерной сферы в себя тривиальному отображению в точку.

2. Докажите, что все окружности на плоскости пересекаются в фиксированных

двух точках комплексной проективной плоскости. Что это за точки такие?

3. Найите фундаментальную группу тора. Каким её элементам соответствуют

окружности, на которые торы расслаиваются в конструкции Хопфа?

4. Проведите полную классификацию двумерных поверхностей - включающую

в том числе любые неориентируемые поверхности. Нарисуйте многогранник на

бутылке Клейна, и найдите Эйлерову характеристику последней.

5. Найдите фундаментальную группу пространства, из которого вырезан

узел "трилистник"; обычная окружность; две зацепленные окружности.

6. Почему расслоение Хопфа нетривиально (то есть не является прямым

произведением окружности и сферы)? Подсказка: гомотопические группы.

НЕДЕЛЯ 4: СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ГРУППАМИ ВРАЩЕНИЙ

Лекция 13. Комплексные числа как средство описания вращений плоскости.

Задача Гамильтона о вращениях пространства. Догадка о кватернионах.

Лекция 14. Анализ вращений пространства как пар кватернионов: формулы.

Отождествление группы единичных кватернионов с $SU(2)$

Лекция 15. Знаменитое отображение $SU(2) \to SO(3)$ на языке кватернионов как

комплексных матриц 2х2 специального вида. Геометрия построенного отображения

Лекция 16. Ещё о кватернионах: теорема Фробениуса о расширениях поля

вещественных чисел. Октавы Кэли. Векторные поля на сферах

ЗАДАЧИ НА ЧЕТВЁРТУЮ НЕДЕЛЮ:

1. Опишите все двумерные подпространства четырёхмерного вещественного

пространства линейных преобразований плоскости, которые образуют поле.

2. Получите явные формулы произведения двух кватернионов, реализованных

посредством комплексных матриц второго порядка: поворота относительно

одной из базисных осей, и поворота относительно другой из осей.

3. Опишите все конечные группы порядка $8$, и докажите их попарную

неизоморфность друг другу. Сколько среди них некоммутативных?

4. Опишите все конечные подгруппы в группе вращений трёхмерного

пространства, а также в группе всех движений сферы, не обязательно

сохраняющих ориентацию.

5. Постройте максимально возможное количество линейно независимых

в каждой точке непрерывных векторных полей на первых нескольких

сферах (начиная от окружности и кончая сферой пятимерной).

6. Докажите, что ассоциативность умножения чисел Кэли верна для тех

случаев, когда в произведении трёх разных числе участвуют только два.

**5. ОТЧЁТНОСТЬ ПО КУРСУ:**

Слушатели курса сдают письменный экзамен, решая четыре предложенные

им задачи (по одной на каждую неделю курса). Кроме того, каждый четверг

выдаётся домашнее задание, которое слушатели сдают в понедельник (при

этом последнее домашнее задание сдаётся в день экзамена). Финальная же

оценка является взвешенным средним, в котором каждое домашнее задание

даёт вклад 5 процентов, а экзамен - оставшиеся 80 процентов.

**6. ЛИТЕРАТУРА ПО КУРСУ "ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГРУПП":**

1. Шафаревич, Никулин "Геометрия и группы"

2. Берже "Геометрия", в двух томах

3. Прасолов "Геометрия Лобачевского"

4. Прасолов "Наглядная топология"

5. Артин "Геометрическая алгебра"

6. Дьедонне "Линейная алгебря и элементарная геометрия"

7. Данилов "Неподвижные точки"

8. Костикин "Введение в алгебру"

9. Кострикин, Манин "Линейная алгебра и геометрия"

**НЕКОТОРЫЕ КОММЕНТАРИИ ПО ОСВОЕНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ:**

Данный курс соткан из лоскутков различных сортов, каждый из которых

вырван, как из платья, из той или иной книги выше. По хорошему, все эти

книги должны быть прочитаны, чтобы стать асом во всех обсуждаемых на

лекциях вопросах. Маломерные группы вращений изложены в двух книгах

Кострикина, в соответствующих разделах. Впрочем, я всячески рекомендую

и эти две последние книги к подробному и обстоятельному изучению.