

Университет Дмитрия Пожарского

**Программа дисциплины**

**«*Теория игр»***

**1. КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ КУРСА:**

Начальный курс теории игр закладывает основы современного общепринятого

подхода к формализации конфликтных ситуаций - возникающих в экономике,

политике и в процессе иных социальных взаимодействий. Введением в теорию

игр нам послужит разбор "с нуля" нескольких конкретных этюдов.

Каждый этюд начинается с понятной непрофессионалу проблемы. В одних

случаях это просто "детская игра", в других - формализованное жизненное

наблюдение, в третьих - обобщённая социальная закономерность. Сюжет

затем разворачивается, исходя из логики содержащегося в нём конфликта,

и сам порождает тот или иной принцип разрешения конфликта, который

окончательно строго формализуется в виде решения игры.

Цепочки несвязанных этюдов, а порой наоборот - тесно связанных друг с

другом сюжетных линий - выводят на основные формальные конструкции

базовой теории игр. По ходу дела в нескольких отступлениях приводятся

формулировки теорем существования игровых решений - с набросками

доказательств либо с полными их доказательствами.

При подробном описании курса разбираемые сюжеты переносятся в список

задач, а основные темы курса изложены в соответствии с графиком лекций.

**2. ПРЕРЕКВИЗИТЫ (наиболее важные приёмы и технические результаты,**

**которыми слушатели должны владеть на момент начала его освоения):**

На момент начала освоения курса слушатели должны владеть основами

математического анализа и линейной алгебры: уметь дифференцировать

функции одной и нескольких переменных, вычислять определённые и

неопределённые интегралы, свободно оперировать в конечномерном

линейном пространстве, знать матричную технику, уметь ставить и

решать задачи многомерной оптимизации, быть знакомыми с началами

выпуклого анализа и теории веротностей, а также с навыками решения

простейших дифференциальных уравнений. Кроме того, конечно,

от слушателей требуется твёрдое знание и владение приёмами

элементарной (школьной) математики.

**3. СООТНЕСЕНИЕ С ПРОГРАММАМИ ДРУГИХ ДИСЦИПЛИН:**

Теория игр в значительной мере перекликается с курсом прикладной

математики, читаемым параллельно в том же модуле. Это имеет свои

плюсы: слушатели теории игр НЕМЕДЛЕННО узнают об одной из сфер

применения техники, излагаемой на занятиях по прикладной математике.

Иногда происходит даже наоборот: при разборе сюжетов из теории игр

возникает необходимость в некоторых конструкциях, которые как раз

подоспеют на одной из следующих математических лекций.

Кроме того, в теории игр традиционно много сюжетов из экономики,

в особенности из микроэкономики, которая будет прочитана в первом

модуле (теория игр читается сразу вслед за ней, во втором). "Микро-1"

и теория игр на пару создают основу для овладения материалом всех

последующих курсов экономической линейки: макроэкономики, теории

игр-2, эконометрики, микроэкономики-2, теории отраслевых рынков,

агентных моделей в экономике, теории аукционов, неравновесной

экономики, а также теории сложных сетей.

**4. ПОДРОБНОЕ ОПИСАНИЕ КУРСА (предварительный календарный план**

**занятий, примерные темы лекционных и семинарских пар, а также задач):**

НЕДЕЛЯ 1: СТАТИЧЕСКАЯ ИГРА

Любое игровое взаимодействие может быть описано как со статической,

так и с динамической точки зрения. В первом случае фиксация внимания

происходит на множествах доступных игрокам {\bf стратегий}, то есть всех

возможных способов поведения в игре. Во втором случае явно учитывается

очерёдность ходов и раскрытие информации.

Чисто статических взаимодействий, на самом деле, не существует, однако

рассмотрение модельных упрощений позволяет многое понять по-новому.

Лекция 1. Доминирование и Парето-оптимальность. Дилемма заключённых.

Итеративное доминирование и кривые реакции. Рациональное поведение.

Лекция 2. Равновесие Нэша. Проблемы существования и множественности.

Смешанное расширение. Симметричные игры и симметричные равновесия.

Лекция 3. Теорема существования смешанного равновесия. Существование

симметричного смешанного равновесия в симметричной игре. Неподвижные

точки: теоремы Брауэра и Какутани.

Лекция 4. Игры с нулевой суммой и с топологическими пространствами

стратегий: различные варианты теоремы существования равновесия.

ЗАДАЧИ НА ПЕРВУЮ НЕДЕЛЮ:

1. Трое студентов решают, куда пойти в поход. Варианты: Карелия, Урал и

Прибайкалье. Профиль предпочтений задан циклическим образом. Решают

так: каждый отмечает одну из опций. В случае, если хотя бы двое назвали

одинаковое место, в поход идут туда. Если все трое назвали разное, решает

командир (первый игрок из трёх). Решите задачу по слабому доминированию.

Также найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях. Как найденные

ситуации соотносятся с ситуацией честного поведения?

2. Приведите пример игры двух лиц, в которой нет равновесия Нэша, в том числе

смешанного. Приведите также пример конечной игры двух лиц, в которой имеется

ровно $3$ равновесия Нэша в чистых стратегиях. Можно ли реализовать подобную

ситуацию через игру, в которой по две стратегии у каждого из игроков?

3. Несколько человек одновременно решают, прыгать ли через турникет метро.

Есть дружинник, который поймает случайным образом одного из "прыгунов". При

поимке выписывается штраф в 100 рублей. Проезд стоит 40 рублей. Формализуйте

эту игру и определите в ней все чистые равновесия, в зависимости от числа игрков.

4. Двое друзей встречают гнома с Волшебным Эликсиром. Каждый грамм Эликсира

даёт лишний год жизни. У гнома есть 100 грамм Эликсира. Каждый из двух друзей

называет количество грамм Эликсира, которое он хотел бы употребить. Если сумма

заявок не превосходит 100 грамм, то заявки исполняются. Если же в сумме было

заявлено более 100 грамм, то рассерженный гном исчезает. Формализуйте эту

ситуацию в виде игры, и найдите все равновесия в такой игре.

5. Петя ищет Машу в квартире. Маша может спрятаться в шкафу-купе, в ванной

за шторкой, под кроватью или за вешалкой. Если Петя с первого раза находит

Машу, то Маша ему дарит мороженое. Если с первой попытки Петя Машу не

находит, то наоборот - мороженное дарит Маше Петя. Формализуйте эту игру.

Докажите, что в ней существует единстенное смешанное равновесие. Какое?

6. Играет весь класс, каждый называет натуральное число. Выигрывает тот, кто

назвал наименьшее число, не названное больше никем из одноклассников. Если

такого игрока нет, то никто не выигрывает. Формализуйте игру и найдите все

равновесия в чистых стратегиях. Найдите также симметричное равновесие в

смешанных стратегиях в такой игре при условии, что игроков трое, а называть

можно только числа 1, 2 и 3.

НЕДЕЛЯ 2: ДИНАМИЧЕСКАЯ ИГРА КОНЕЧНОГО ГОРИЗОНТА

В динамическом взаимодействии внимание уделяется тому, кто в какой

момент ходит, а также~--- что он в этот момент {\bf знает} об игре - то есть

о сделанных ходах остальными игроками, или об их функциях выигрыша.

Игры с неполной информацией, обычно включаемые в раздел игр статических,

при моём понимании, напротив, являются подразделом {\bf динамических} игр.

Просто в них все информационные сложности разрешаются одномоментно.

Лекция 5. Игры последовательных ходов: принцип Цермело.

"Кто выигрывает при правильной игре?" Игры и алгоритмы.

Лекция 6. Общая концепция динамической игры: информационные

множества, аксиомы Куна и понятие стратегии. Сведение к статике,

равновесие Нэша. Равновесие, совершенное на подыграх.

Лекция 7. Сильное и слабое секвенциальные равновесия. Теорема

существования сильного секвенциального равновесия в общем случае.

Принцип дрожащей руки. Связь разных концепций решения игры.

Лекция 8. Статические игры с неполной информацией. Знакомство с

аукционами. Равновесие дискретного отклика в динамике и в статике.

ЗАДАЧИ НА ВТОРУЮ НЕДЕЛЮ:

1. Трое студентов снова решают, куда пойти в поход. Варианты те же: Карелия,

Урал, Прибайкалье, но ещё и Подмосковье. Профиль предпочтений задан (тем

или иным способом). Решают так: по очереди вычёркивают один из вариантов.

Решите задачу методом Цермело. Сравните ответ с ситуацией такого поведения,

когда каждый честно вычёркивает худшую из оставшихся альтернатив.

2. Русская рулетка - формализуйте двумя способами (без информационных

множеств, и с ними). Решите задачу при различных комбинациях параметров.

3. Дуэль трёх лиц, в которой указаны меткости игроков. Формализуйте как

последовательную дуэль, когда стреляют строго по очереди, так и вариант

дуэли, в котором в каждом раунде стреляют все живые одновременно.

Найдите все равновесия при обоих формализациях, предполагая, что

в игре всего (А) два (Б) три раунда. (Ниже - продолжение в лекциях!)

4. Виктор и Александра должны встретиться в метро. Оба живут на серой

ветке в Москве, но точный адрес каждого игрока известен лишь ему, второй

же может лишь догадываться, исходя из равномерного распределения шансов.

Оба одновременно шлют друг другу СМСку с "адресом", и встречаются на той

станции, которая посередине между посланными адресами. Каждый хочет как

можно меньше ехать до места встречи. Формализуйте как Байесову игру. Каков

наилучший ответ на честную стратегию поведения? Найдите в этой игре

равновесие Байеса-Нэша.

5. Два экономиста живут в одной комнате во время конференции в течение

четырёх дней. Они договорились, что продукты будут покупать по очереди:

первый день Сергей, второй день Костя, третий день Сергей, последний -

снова Костя. Поход за продуктами на двоих занимает 20 минут, на одного

- 15 минут. Время - деньги. Каждый игрок решает, нарушить или не нарушать

договор; в случае нарушения второму придётся бежать за продуктами тоже.

Формализуйте как динамическую игру и решите её по Цермело. Далее, пусть

Костя - матэкономист, то есть, с точки зрения Сергея, Костя с некоторой

вероятностью просто верен своему слову: если его не обманывали, то он

и не будет (в случае обмана договор, понятно, аннулируется). Найдите

сильное секвенциальное равновесие в зависимости от вероятности

честности Кости (с точки зрения Сергея).

6. Рассчитать равновесие дискретного отклика в играх "Ультиматум",

"Сороконожка", в Дилемме заключённых и в иных предыдущих играх.

НЕДЕЛЯ 3: ДИНАМИЧЕСКАЯ ИГРА БЕСКОНЕЧНОГО ГОРИЗОНТА

Динамические игры бесконечного горизонта сегодня представляют собой

один из центральных инструментов теоретико-игрового моделирования

"реальных" конфликтов в политике, экономике и других социальных науках.

Слово "реальный" взято в кавычки по той причине, что на самом деле почти

все известные мне модели принципиально неверифицируемы: все входящие

в них переменные носят совершенно абстрактный, отвлечённый характер и

не соответствуют никаким потенциально измеримым характеристикам

(типа "доверие", "демократия", "коррупция" и др.).

Тем не менее теория динамических игр с бесконечным горизонтам является

на редкость популярной, а владение ею - последний писк моды мейнстрима.

Кроме того, в математическом смысле она красива, трудна и содержательна.

Лекция 9. Стационарное динамическое программирование: существование

оптимальной стратегии среди марковских стратегий. Примеры из экономики.

Лекция 10. Повторяющиеся игры: народные теоремы. Принцип однократного

отклонения, его применение. Модели конкуренции на выживание (обзор).

Лекция 11. Многосторонние дуэли (теоретико-игровая формализация войн).

Ключевые результаты для дуэлей трёх лиц, парадокс выживания слабейшего.

Лекция 12. Общая теорема существования равновесия в стохастических

играх бесконечного горизонта: "теорема о матрёшке". Приложения.

ЗАДАЧИ НА ТРЕТЬЮ НЕДЕЛЮ:

1. Докажите принцип однократного отклонения для задачи стохастического

динамического программирования. Как он связан с принципом Беллмана?

2. Рассчитайте оптимальную бесконечную траекторию потребления и

сбережения в модели с капиталом, портящемся со временем с неким

заданным темпом. Сравните с результатом для базовой модели.

3. Рынок, на котором конкурируют две фирмы, убывает - в очередной

период t прибыль первой из фирм задаётся выражением $200 - 20t$, а

второй фирмы - выражением $25-2t$, если они обе остаются на рынке.

При уходе одной из них другая ещё долгое (конечное) время получает

положительную прибыль. Найдите совершенное на подыграх равновесие.

4. Рассчитайте все равновесия для варианта дуэли трёх лиц, в котором

игроки стреляют по очереди и после трёх выстрелов в воздух следующих

игрок уже обязан сходить. Сравните с исходом стандартной модели.

5. Пускай в одновременной дуэли четырёх лиц меткости первых двух

игроков равны друг другу, и меткости вторых двух - тоже равны между

собой, но строго ниже меткостей первых двух. Найдите равновесие.

6. Получите полное решение задачи о монопольном рынке с большим

числом покупателей, на котором продаётся товар длительного срока

годности, и монополист очень часто может обновлять ценник.

НЕДЕЛЯ 4: КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ И РАВНОВЕСИЕ ПО ВАЛЬРАСУ

Кооперативная теория игр - наука практически полностью аксиоматическая.

Её достижениями являются, как правило, различные теоремы существования,

единственности и характеризации игровых решений при заданных требованиях.

Коалиционная игра простейшего вида задаётся набором выигрышей всех

возможных непустых групп игроков ("коалиций"). На основании этого букета

данных и надо выработать решение игры, то есть, "кому сколько полагается".

В дальнейшем кооперативная теория игр разрослась, включила в себя игры

на сетях, динамическое многопериодное взаимодействие ("переговоры") и

вообще стала постепенно сливаться с динамической теорией игр.

Венцом кооперативной теории игр являются два результата: теорема Эрроу

о диктаторе (открывающая целую ветвь - "теорию общественного выбора") и,

наверное, самый знаменитый метод Гейла и Шепли поиска стабильного марьяжа.

Лекция 13. Аксиоматический подход к моделированию рынка

обмена (отсутствие арбитража частных сделок). Концепция ядра.

Лекция 14. Марьяжи: модель Гейла и Шепли. Общее определение

кооперативной игры нескольких лиц. Теорема Скарфа-Данилова.

Лекция 15. Игры с побочными платежами: вектор Шепли, описание

ядра, супермодулярность. Игра "построение взлётной полосы".

Лекция 16. Теория принятия решений. Функционал общественного

выбора. Теорема Эрроу о диктаторе. Принцип медианного избирателя.

ЗАДАЧИ НА ЧЕТВЁРТУЮ НЕДЕЛЮ:

1. На рынке есть 100 владельцев левых башмаков и 101 владелец

правых. Функция полезности любого участника - количество пар

обуви, которым он обладает (любой левый ботинок подходит к

любому правому). Найти ядро и равновесие Вальраса.

2. Приведите пример, показывающий, что в задаче о марьяже при

любых парах ("гомосексуальный марьяж") теорема об устойчивости

становится неверной. Также обобщите принцип Гейла и Шепли на

"тройки" выпивох (разбиение не на пары, а по трое).

3. Три студента - Алиса, Боря и Влас - играют в подземном переходе. По

одиночке они могут заработать 30, 36 и 48 рублей в час, соответственно.

В парах АБ, АВ и БВ заработки, соответственно, равны 60, 72 и 84 рубля

в течение часа. Втроём они могут заработать 150 рублей за час. Найдите

ядро и вектор Шепли. Является ли эта игра супермодулярной?

4. Один житель Улан-Удэ решил построить водопровод по улице, на

которой он жил (история реальная, жителя зовут Даши Церенов). Его

коттедж находится на самом верху; всего домов 10. Стоимость проведения

водопровода к коттеджам (домам) равна, соответственно, 70 тысяч рублей,

ещё некоторые 8 промежуточных значений, и 1 790 тысяч до коттеджа

Даши. Наш инициативный товарищ пробежался по всем соседям, беря

с каждого поровну требуемую сумму (собрать надо стоимость проводки

до последнего коттеджа). Объясните, почему владелец нижнего дома

не является рациональным агентом, а также рассчитайте, во сколько

раз больше денег взял с него Даши, чем он был должен по Шепли.

5. Совет Безопасности ООН состоит из 15 стран (каких?). Решения

принимаются большинством, но только если "за" - все 5 стран-вето

(каких?). Формализуйте эту ситуацию как кооперативную игру, и

найдите ядро, а также вектор Шепли. Каково влияние игроков?

6. В течение долгих лет московская команда "Локомотив" уверенно

выступала против Спартака и ЦСКА в личных встречах, но сливала

чемпионат в целом. Пользуясь теорией медианного избирателя,

дайте объяснение этому феномену.

**5. ОТЧЁТНОСТЬ ПО КУРСУ:**

Слушатели курса сдают письменный экзамен, решая четыре предложенные

им задачи (по одной на каждую неделю курса). Кроме того, каждый четверг

выдаётся домашнее задание, которое слушатели сдают в понедельник (при

этом последнее домашнее задание сдаётся в день экзамена). Финальная же

оценка является взвешенным средним, в котором каждое домашнее задание

даёт вклад 5 процентов, а экзамен - оставшиеся 80 процентов.

**6. ЛИТЕРАТУРА ПО КУРСУ "ТЕОРИЯ ИГР":**

1. Ken Binmore "Fun and games".

2. Колесник "Теория игр".

3. Данилов "Лекции по теории игр".

4. Захаров "Теория игр".

5. Данилов, Сотсков "Механизмы общественного выбора".

**СОВЕТЫ И КОММЕНТАРИИ ПО ОСВОЕНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ:**

Первая книга написана для ламеров с "американским" математическим образованием,

но читается просто взахлёб. У неё есть ещё и продолжение "Playing for real", значительно

более сложное по содержанию. Её можно рекомендовать сильным студентам.

Второе издание второй из книг в данный момент находится на научной редакции, и этот

научный редактор - я сам. Книга подойдёт любителям "советской школы" в теории игр.

Третья книга - это крэш-курс для продвинутой публики, знакомой с категорным языком,

тензорными конструкциями, теорией неподвижных точек и другими деликатесами.

Четвёртая книга тоже подверглась моей научной редактуре, так что рекомендую её

с чистой совестью всем подряд. Маленький недостаток строгости компенсируется с

лихвой множеством увлекательных примеров, сюжетов и задач.

Наконец, для тех, кто будет теорией игр заниматься всерьёз, предлагается пятая книга.