Оглавление

Предисловие

Посвящается моей жене Марине, деточкам Мише,
Гале, Свете и Юре, любимым Маме и Папе,
а также всем моим родственникам и друзьям!

История написания этой книги такова. Долгие годы я ездил по всей стране с лекциями «Математика для экономистов» в разных ее вариантах (теория игр, микроэкономика или теория принятия решений — все эти на первый взгляд разные по содержанию дисциплины очень быстро превращались в простой математический ликбез для преподавателей экономики).

Постепенно я понял, чем отличается гуманитарное мышление от мышления представителей точных наук — понял на таком уровне, когда «понимание» переходит в качество преподавания.

Я стал преподавать математику (под видом всех этих «псевдоэкономик») неспециалистам таким образом, чтобы как можно скорее «зацепить их за живое» и заставить напряженно думать над сложными вещами. Пришлось придумать (или накопать в разных учебниках) целый ряд якобы жизненных ситуаций, которые при формализации давали нетривиальное игровое взаимодействие; при поиске же равновесия в соответствующей игре слушатели уже были готовы решать уравнения, изучать построения и графики, зачастую вспоминать производные и интегралы и т. п. Чувство, что всё это проходили когда-то в университете только ради муштры и зазубривания, постепенно уходило.

Потом я понял, что ограничение только околоэкономическими сюжетами (и аудитория преподавателей экономических дисциплин) мне начинает, так сказать, жать. Душа просила большего — а именно: бесед с широким кругом нематематиков, и прежде всего гуманитариев (технарей я всегда сторонился — они всюду ищут конкретику и прикладное значение).

И вот я сказал Михаилу Викторовичу Поваляеву, ктитору* Университета Дмитрия Пожарского и одновременно директору Филипповской Школы в Москве, что хочу где-нибудь испробовать свои идеи относительно преподавания математики гуманитариям. Он предложил Вечерние Курсы Университета Дмитрия Пожарского.

И тут началось.

*«Ктитор» — по-гречески «строитель», то есть человек, не просто дающий деньги на какое-то дело, но и активно в этом деле участвующий.

Уже на первый запуск записалось около пары сотни слушателей, из которых 30–40 регулярно ходили на занятия. Иногда приходилось перемещаться в актовый зал — все слушатели просто не помещались в обычных классных комнатах Филипповской школы.

Но и это еще не всё. Уж не знаю, что тут сказалось — вековой голод гуманитариев по человеческому преподаванию «великой и ужасной» Царицы всех наук, «сарафанное радио» или моя фанатичная манера чтения лекций, но через пару лет записанные и выложенные в интернет видеозаписи посетило несколько десятков тысяч человек.

Мне реально казалось, что я ухватил «гуманитарного бога» за бороду. Разумеется, тут не могло обойтись без какой-то особенной удачи, «звезд особого схождения».

И вот спустя год мне звонит Катя Богданович, учитель математики в Филипповской Школе, и говорит: «Лёша, я всё перенесла на бумагу». Я опешил — это же какая работа: вырезать все мои слова-паразиты, перенести мою рваную речь с видеозаписи на текст!

Несомненно, без этих 70 часов работы (как мне призналась Екатерина!) книга бы никогда не смогла увидеть свет — у меня ни в каком обозримом будущем не появилось бы столько свободного времени. Бегло проглядев рукопись и снова посоветовавшись с Михаилом Викторовичем Поваляевым, я понял: нужно «пропустить» книгу сквозь взгляд истинного гуманитария, раз уж она предназначена именно для этой аудитории.

И я попросил известного историка Сергея Владимировича Волкова прочитать рукопись и пометить все места, в которых мне что-то казалось очевидным, но таковым не было, или где используются термины, которые могут гуманитария сбить с толку («трансцендентность» и «иррациональность», например, как оказалось, в жизни тоже имеют какие-то значения, о чем я сам до общения с Сергеем Владимировичем и не подозревал!).

После этого я передал рукопись своему папе, Владимиру Васильевичу Савватееву, тоже математику по образованию и преподавателю многих математических дисциплин. Текст был им доработан с включением так называемых «врезок» (мой папа их так назвал) и иногда отдельных абзацев, выделенных *курсивом*. Папа обработал замечания Сергея Владимировича, а также нашел и исправил множество неточностей и ошибок.

Кроме того, огромную работу проделал верстальщик Евгений Иванов. Отдельные несуразности выловил мой ученик Саша Новиков, который прочел рукопись на одной из последних стадий готовности, а также мой друг и коллега, ведущий специалист по комбинаторной геометрии в нашей стране Андрей Михайлович Райгородский. Наконец, целиком от начала и до конца одну из финальных версий книги прочла Дарья Орешенкова, секретарь Университета Дмитрия Пожарского, и «выловила» несколько дополнительных спорных мест.

Всем, кто мне помогал в процессе работы над книгой на разных стадиях, я хочу здесь выразить свою глубочайшую признательность и благодарность — ваши поддержка и помощь были бесценны, книга без вас бы не вышла никогда!

Наконец, самое большое спасибо хочу сказать моей жене Марине за крайне внимательное неоднократное вычитывание всей книги, а также за моральную поддержку в течение всего этого времени!

В итоге, несмотря на окончательное наше решение оставить в качестве автора одного меня, фактически книга является совместной работой многих людей! Разумеется, все оставшиеся ошибки и недочеты при этом я целиком и полностью беру на себя.

Надеюсь, что всем, кто эту книгу прочтет и проработает, математика уже никогда не будет казаться чем-то скучным, нудным или отвлеченным! Приятного вам чтения, друзья!

В процессе работы над курсом лекций, легших в основу этой книги, автор получал поддержку от Русского фонда содействия образованию и науке, а также от Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках гранта Правительства РФ № 14.U04.31.002 от 26 июня 2013 года «Изучение разнообразия и социальных взаимодействий с фокусом на экономике и обществе России» (администрируемого Российской Экономической Школой).

Раздел I

«Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит».

М. В. Ломоносов

Лекция 1

Алексей Савватеев: Здравствуйте!

Аудитория: Здравствуйте!

А.С.: Для начала я расскажу кое-что о себе.

В 1990 году я закончил 57-ю школу г. Москвы. Может быть, кто-то из вас ее знает. Тогда это была математическая школа. Но в 1989 году по инициативе нашей учительницы литературы Зои Александровны Блюминой было принято решение набрать гуманитарный класс, чтобы уравновесить огромный перекос учащихся в мужскую сторону в нашей школе. Я был в 11-м классе, а набрали 9-й.

Зачем я об этом говорю? У меня в гуманитарном классе была подруга, которой я объяснял математику. Однажды надо было решить уравнение типа $\sin x = \frac{1}{2}$. Я *объяснял, объяснял, объяснял,* а потом перешел непосредственно к решению уравнения $\sin y = \frac{1}{2}$. Она говорит: «Стой... Там же был $\sin x$».

Я начинаю объяснять: «Это закрытый терм, замкнутая переменная, она уничтожится». Ничего не понимает, в глазах ужас. Я продолжаю: «Мы должны решить уравнение относительно y, да?»

— Нужно же было относительно x решать, ну зачем ты «y» написал?

У меня случился *затык*, не могу объяснить и всё. И тогда я понял, что из меня получается очень плохой учитель. Я привык говорить со школьниками, которые приходили на маткружок. А они не задавали таких вопросов.

Спустя годы я закончил мехмат МГУ и Российскую Экономическую Школу (РЭШ), после чего ездил по регионам России, вел курсы повышения квалификации для преподавателей экономики. В Москве считалось, что экономика — наука совершенно математизированная и точная. По крайней мере, и в РЭШ, и в Высшей Школе Экономики до сих пор всячески насаждается, что математика — это главное в экономике. В регионах мы столкнулись, однако, с преподавателями, которым было трудно перешагнуть через вещи, для математиков очевидные. Но через пять дней курса многие слушатели оказывались очень способными к математике. Просто в некотором месте у них стоял заслон. Его полезно преодолеть всем, ибо это — часть интеллектуальной культуры. Даже если вы никогда не занимались математикой, некоторые вещи знать надо... Так же как я должен знать что-то про историю или химию.

Давайте теперь поговорим о словосочетании «абсолютное доказательство». Если вы в общем и целом поймете, что это такое, то значит, мы не зря сегодня позанимались с вами.

Что такое абсолютное доказательство, я объясню на примерах. Начнем с игры в «пятнадцать».

Слушатель: Пятнашки?

Слушатель: Шестнашки?

А.С.: Чтобы мы говорили об одном и том же, я объясню правила этой игры.

В квадрате 4×4 имеется пятнадцать одинаковых квадратных фишек, пронумерованных от 1 до 15. Их нельзя вынимать, можно только передвигать на свободное место. Стандартная исходная позиция: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 и пустое место, которое используется для передвижения фишек. (См. рис. 1; может быть задана и нестандартная исходная позиция.)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Рис. 1. Стандартная исходная позиция игры в «пятнадцать».

Пустое место можно гнать по всей игровой зоне, т. е. *разрешенное действие* при игре — передвижение на пустое место одной из соседних с ним фишек.

Игру придумал где-то 130 лет назад американский математик-популяризатор Сэм Лойд. А чуть позже он пообещал большой приз

($1000) тому, кто переведет комбинацию с картинки рис. 2 в исходную позицию на рис. 1.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Рис. 2. Исходная позиция, которую получили, поменяв местами фишки 14 и 15.

Такая вот детская игра. Делайте, что хотите (в рамках указанного правила). Передвигайте фишки как вам угодно. Только приведите игру в исходную позицию. Начался настоящий пятнашечный бум. Примечательно, что на этот момент наука алгебра в другой части света находилась в очень продвинутом состоянии. Математики сказали свое веское слово, предоставив абсолютное доказательство того, что выиграть в такую игру невозможно. Тем не менее ажиотаж с игрой в пятнашки продолжался еще много лет — так много было желающих посрамить математику и «срубить» тысячу долларов.

Что же означает в этой игре «абсолютное доказательство»? Это значит: какие бы действия вы не совершили, сколько бы времени и каким количеством способов бы не передвигали фишки, вы *никогда, ни при каких условиях* не вернетесь из позиции на рис. 2 в исходную позицию на рис. 1. В частности, если кто-то предъявил такое решение, значит он — лгун. Он, видимо, взял, выдрал фишки из коробки и расставил их в правильном порядке. Абсолютное доказательство — это точное, настолько точное утверждение, насколько вообще что-то может быть точным. Математика — наука точных утверждений. Не «примерно», не «может быть», не «скорее всего, не приведете», а *никогда, ни при каких условиях не приведете, какие бы способности к этой игре у вас ни были.*

Я постараюсь доказать эту теорему. Но что значит «постараюсь доказать»? Что вообще означает «доказать»? Что значит «я ее докажу»? Как вы это понимаете?

Слушатель: Мы будем убеждены.

А.С.: Вот именно. Я найду способ вас убедить. Но с другой стороны, это не совсем то, что нам нужно.

Расскажу такую историю. Один рыцарь объяснял другому рыцарю математику. Первый рыцарь был очень умный, а второй — очень глупый. Второй рыцарь никак не мог понять доказательство. И тогда умный рыцарь говорит: «Честное благородное слово, это так». И второй сразу поверил: «Ну, тогда о чем разговор. Мы же с Вами люди безупречной чести, и я, конечно, Вам верю. Я полностью убежден».

У нас разговор пойдет не о таком способе убеждения. Идея математического, абсолютного доказательства не в том, что я дам честное слово, а в том, что я, апеллируя к вашему *разумению*, передам вам какое-то знание, которое вы потом столь же спокойно передадите дальше. Вы придёте и скажете: «Мы знаем, почему в "пятнашки" бессмысленно играть. Мы это знаем совершенно точно, нам это доказал Алексей. И не просто доказал при помощи какого-то там шаманства, пошаманил-пошаманил и сказал, что нет решения у этой задачи. Мы получили такое знание, которое сможем воспроизвести и доказать, что выиграть в игру "пятнашки" невозможно».

Насчет пошаманить есть очень поучительный эпизод из жизни математиков. В начале XX века жил в Индии математик Сринива́са Рамануджан. На момент начала нашей истории ему было 26 лет. Он заваливал письмами лондонское математическое общество, в которых были формулы, содержащие числа «π» и «e» (мы с ними позже познакомимся) и страшные бесконечные суммы, которым эти выражения равны. В Лондоне проверяют — всё верно. А Рамануджан присылает всё новые и новые письма. Профессор математики Г. Харди приглашает его приехать в Англию и рассказать, как он выводит эти формулы. Рамануджан отвечает, что формулы сообщает ему во сне богиня Маха-Лакшми*. Харди, конечно, посмеялся, решив, что индус не хочет делиться секретом.

*По другим сведениям, это была богиня Намаккам.

Английский математик пишет новое письмо, в котором пытается заверить Рамануджана, что никто не будет претендовать на его открытие. Такое предположение оскорбляет индуса. Он отвечает, что совершенно не дорожит такими вещами, как авторство.

В конце концов Рамануджан все-таки приехал в Лондон, где стал профессором университета. Многие присланные им формулы оказались верны. Но далеко не все из предложенных им формул на сегодняшний день доказаны. Некоторые из них остаются откровениями, которые были сообщены богиней Рамануджану. «Абсолютное» их доказательство пока неизвестно.

А теперь отдохнем, посмотрим на этот футбольный мяч (рис. 3).

Рис. 3. Неужто и здесь прячется абсолютное доказательство?

Из чего состоит мяч? Он сшит из лоскутков. Вы когда-нибудь задумывались над тем, как именно сделан футбольный мяч и почему именно так? Это — чисто математический вопрос. Вы пока подумайте, где же тут математика. А я приступаю к математическому доказательству невозможности выиграть в игру «15».

Начнем с гораздо более простой ситуации. Возьмем доску 8×8 (рис. 4) и достаточно большой запас (заведомо больший, чем нам может понадобиться) костей домино (одна доминошка покрывает две клеточки на доске).

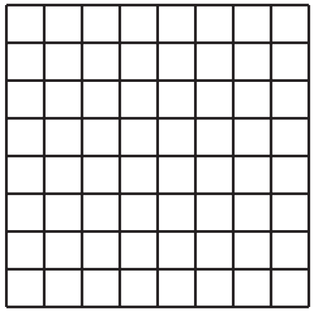

Рис. 4. Доска 8×8.

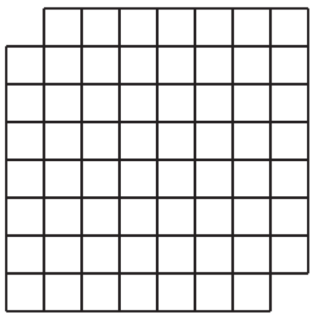

Рис. 5. «Урезанная» доска 8×8.

Теперь я аккуратненько отрезаю у квадрата 8×8 два противоположных угла (рис. 5). Получилась фигура, которая состоит из 62 квадратиков. Число, делящееся на 2. Поэтому почему бы не попробовать замостить ее доминошками. Но если вы начнете пытаться сделать это один, два, три, четыре раза, у вас ничего не будет получаться. 30 доминошек влезет, а 31-я — нет. Физик, когда увидит эту ситуацию, поэкспериментирует 1000 раз и скажет: «Экспериментально установлен закон — нарисованная фигура не замощается доминошками 1×2». Физик* также может наблюдать за игрой в футбол много-много раз и сказать: «Экспериментально установлено, что мяч падает вниз, а также, знаете,

*Это обидная для физиков аналогия.

все остальные тела, похоже, тоже падают вниз». Все знают, что все тела падают вниз. Это экспериментальный факт. Но доказать этот факт, в принципе, невозможно. Никто на свете не гарантирует, что завтра этот закон не прекратит действовать. Придумают какую-нибудь гравицапу, и всё полетит не вниз, а вверх. Это — физический закон, он не может быть доказан. Он может быть только проверен очень много раз. Еще хуже с социальными и экономическими законами, например, с законом «спрос рождает предложение». У экономистов много таких заклинаний. И они очень часто не работают. Наступает кризис, наступает новая фаза развития социума — и всё. Перестают быть верными старые законы. Социальная реальность постоянно ломает стереотипы, которые связаны с ее поведением, развитием, эволюцией. Физическая реальность так не делает, но тем не менее доказательств в ней тоже нет.

В нашем случае с доской мы, в принципе, можем попробовать перебрать все варианты и сделать вывод — не получилось. Но сколько времени нам нужно будет потратить? Давайте примерно оценим. Сколькими способами можно положить первую доминошку?

Слушатель: Тремя.

А.С. (показывая на доске 8×8 различные положения кости домино): Раз, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять...

Слушатель: Двумя.

Слушатель: Тридцатью.

А.С.: Ну, тридцатью — хорошо. А почему двумя?

Слушатель: Вертикально и горизонтально.

А.С.: Это два способа ее расположения. А сколько положений на самой доске она может занять?

Слушатель: Кучу.

А.С.: Очень-очень много. 30 — это довольно хороший ответ. На самом деле около 50. Давайте исходить из 50. На самом деле не важно, что 30, что 50, даже 10. Потому что после того как мы положили первую такую фишечку, сколько способов остается для второй?

Слушатель: $(n-1)$.

А.С.: Грубо говоря, 49. Еще, на самом деле, надо учесть порядок, в котором мы положили доминошки. Нужно поделить на два. То есть 50 умножим на 49 и поделим на два.

Дальше кладем третью, четвертую и так далее. И каждый раз домножаем и домножаем — количество вариантов очень быстро растет. (Показывает на доске всё новые варианты.)

Есть миф, будто математика состоит из формул. В 1993 году, когда я учился на 3-м курсе мехмата, я ехал на Урал к тете. Со мной в купе ехала мама с маленькой 4-летней дочкой. И дочка говорит: «Мама, а можно почитать дядину книгу?» Книга моя называлась «Алгебра». Мама сказала: «Ты в ней ничего не поймешь, там одни формулы». Я передаю книгу и говорю: «Найдите первую формулу. На какой она странице?» Формул в книге по алгебре не очень много, и самое страшное не в их количестве, а в том, что они ужасающие, в них одни буквы, даже цифр почти нет. Это, скорее, похоже на какой-то древний язык. Совершенно не то в книге, что должно быть с точки зрения людей. Идея, что математика состоит из формул, столь же чудовищна, как мысль, что в храм люди заходят, чтобы просто совершить обряд, поставить свечку. Моя дочь говорит, например: «Пойдем, поставим огоньки». Для нее это нормально, она маленькая. Математика — это вселенная, в которой есть язык формул. Но суть не в нём, а в том, какие глубинные законы есть в математике. И вот эти законы, эту внутреннюю красоту я постараюсь вскрыть.

После такого философского отступления вернемся к нашей доске.

Произведение, которое получится уже через 20 умножений, имеет порядок количества атомов во вселенной (как любят говорить в научно-популярных книгах). Вот с чем сравнимо количество способов, которые нужно перебрать, чтобы заявить: «Мы перебрали все варианты, задачу решить нельзя». Надо придумать что-то другое. И то, что мы сейчас придумаем — это *абсолютное доказательство.*

Может быть, у кого-то есть идеи?

Слушатель: Взять площадь каждой фишки и разделить на нее общую площадь поля.

А.С.: Ничего не выйдет. Общая площадь 62, у каждой фишки — 2, значит нужна 31 доминошка, это мы понимаем. Но 30 умещается, а 31 — нет (рис. 6).

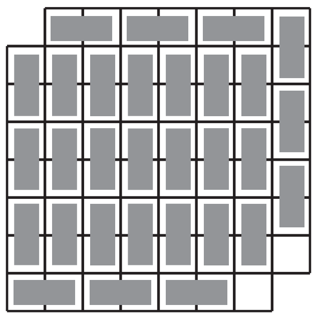

Рис. 6. Внимание! На доске уже не квадратики, а «кирпичи»!

Последняя доминошка распадается на два квадратика в разных местах. И что бы вы ни делали, последняя будет, как заколдованная, распадаться на два квадратика.

Теперь я доказываю, что замостить доску доминошками невозможно.

Ведь перед нами, по сути, шахматная доска. Давайте вернем ей ее шахматный вид. Клетки на ней будут то черные, то белые (рис. 7).

После вырезания двух угловых квадратиков, сколько черных и сколько белых клеточек останется?

Слушатель: Одних будет больше, других — меньше.

Слушатель: Одна доминошка должна покрывать и белую, и черную, да?

А.С.: Кто-то уже всё понимает (см. рис. 8). Любая доминошка, уложенная на эту доску, покрывает и белую, и черную клет-

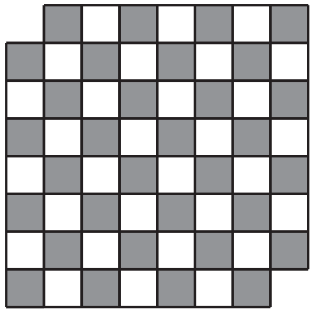

Рис. 7. Теперь все «кирпичи» сделаем двуцветными.

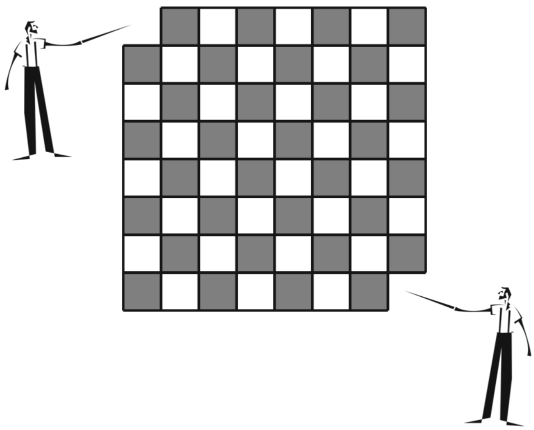

Рис. 8. Сеанс черной магии заканчивается полным разоблачением!

ку. Поэтому, если бы фигуру, которую я сейчас нарисовал, можно было бы заложить доминошками, черных и белых клеток было бы одинаковое количество. Но мы вырезали две белых. Осталось 30 белых и 32 черные клетки. Противоречие. Количества черных и белых клеток не равны друг другу. Значит, нашу фигуру нельзя замостить доминошками. Абсолютное доказательство закончено. Не надо ничего перебирать.

Повторю еще раз.

Я взял урезанную с двух сторон шахматную доску. Исходная шахматная доска имела 32 черные и 32 белые клетки. А в урезанной шахматной доске пропали две белые угловые клетки. Поэтому стало 30 белых и 32 черных. Теперь предположим на секундочку, что мы решили задачу, и все клетки заполнены доминошками. Следует заметить, что каждая доминошка обязана лежать одной своей половиной на черной, а другой своей половиной на белой клеточке, как ты ее ни клади. Следовательно, если бы мы смогли замостить эту фигуру доминошками в количестве 31 штуки, то была бы 31 черная и 31 белая клетка. У нас же 32 черные и 30 белых клеток. А значит, замостить обрезанную доску нельзя. В этом и состоит *препятствие*, как говорят математики, препятствие к решению задачи. Заметьте, что мы проводили *доказательство от противного*. Это очень важный прием. Я предположил, что мы задачу решили, и привел ситуацию к явному противоречию.

Переходим к более сложному сюжету — «разоблачению игры в пятнадцать».

Сейчас вы узнаете тайну, которую почти никто не знает: почему в пятнашки нельзя «выиграть», то есть перевести игру из позиции на рис. 2 в исходную позицию на рис. 1. Посмотрим на измененную позицию:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 13.

Рис. 9. На доске выписываем «извивающуюся змею».

Глядя на рис. 9, выпишу числа от 1 до 15 в линеечку, но не подряд, а хитрым способом. Зачем я это сделаю, будет ясно потом. Вот они:

1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 13.

Такой порядок движения древние греки называли «бустрофедон», что в переводе значит «так, как пашет бык» (рис. 10).

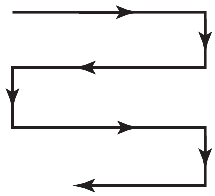

Рис. 10

С помощью такого движения я закодировал информацию об игровом поле в виде одной строки. Обратно раскодировать так же просто, как и закодировать (*с точностью до нахождения пустого места*).

Если, например, сдвинуть 14 в угол, то при кодировании я получу такую же строчку (см. рис. 11). Вообще, легко понять, что правила игры «15» позволяют быстро и уверенно перегнать пустое место на игровом поле на любую клетку из шестнадцати, двигаясь бустрофедоном.

Примечание. Кодированием называется процедура изображения элементов одного множества с помощью элементов другого (обычно более простого) множества, желательно таким образом, чтобы не потерялась никакая существенная часть информации о первом множестве.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15		14

1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 13.

Рис. 11. Пустое место может перемещаться вдоль «змеи».

При этом если пустое место находилось где-то в другом месте, в середине, например, то всегда можно передвинуть фишки так, чтобы оно оказалось в конце.

Теперь мы, начиная с положения рис. 9, должны каким-то образом менять это положение, гонять пустое место, чтобы прийти к последовательности, соответствующей рис. 1:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 15,\ 14,\ 13.$$

Каждый раз, когда я переставляю пустое место, наша строка меняется. Я хочу показать, что как бы она ни менялась, кое-что сохраняется. В математике это называется словом *инвариант.*

Инвариант — что-то, что не меняется.

Понятие инварианта — одно из ключевых математических понятий.

Итак, есть *что-то*, что связано с нашей последовательностью, что при выполнении разрешенных действий не будет меняться. Что это, угадать так просто нельзя, иначе миллионы людей в Америке и в Европе не занимались бы ерундой.

В процессе перестановок строка будет сильно меняться, вплоть до очень серьезного перемешивания. Но что-то меняться не будет никогда. Давайте напряжемся и поймем, что это такое.

Рассмотрим все пары чисел (чисел всего 15). Сколько всего можно составить пар?

Слушатель: 7.

А.С.: Нет. Всех различных пар. Пусть у нас есть 15 кружочков разного цвета. Сколько существует способов вынуть два кружка?

Пока будем считать, что порядок, в котором мы вынимаем кружочки, нам важен. Сколькими способами я могу взять первый кружок?

Слушатель: Пятнадцатью.

А.С.: Пятнадцатью. Правильно.

Слушатель: 15 факториал?

А.С.: Нет. 15 факториал — это множество всех возможных строк.

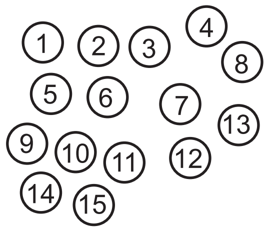

Рис. 12. Нарисуем 15 разных кружочков с номерами.

Но ведь гуманитарии не обязаны знать слово «факториал», о котором мы с вами говорим. Термин «факториал» нам понадобится в других темах, поэтому я его определю.

Есть некоторое число n. Простите, я употреблю буковку. Умножим n на $n-1$, потом на $n-2$ и так далее, и, наконец, умножим на 2 и на 1. То, что получилось, обозначается $n!$ (это и есть факториал числа n):

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Например, «15 факториал»:

$$15! = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Слушатель: Мы сейчас что-то прояснили?

А.С.: Нет. Было произнесено слово «факториал». И теперь я его объясняю.

Факториал — это произведение подряд идущих, убывающих до единицы натуральных чисел. В нашей задаче он не понадобится (понадобится в другой лекции).

Первый кружок вы можете выбрать 15 разными способами. Сколько остается способов для выбора второго кружка?

Слушатели: 14.

А.С.: 14. Итого? Есть такое знаменитое правило произведения. Число способов выбрать пару — это произведение количества способов выбрать первый ее элемент на количество способов выбрать второй. Почему? Мы выбрали первый. Посмотрим, сколько пар мы с ним можем получить. Второй выбирается 14 способами, значит пар 14. А теперь мы выбрали другой первый, с ним тоже можно составить 14 пар. И так далее. Получается $14 + 14 + 14\ldots$ и так 15 раз.

Отсюда и берется правило произведения: $15 \cdot 14$ способов.

Но есть одна хитрость. Я хочу посчитать пары независимо от порядка кружочков. Чтобы вот такие пары (см. рис. 13) не различались. Что надо сделать с количеством способов?

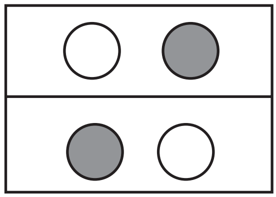

Рис. 13. Эти пары для нас не разные, а одинаковые.

Слушатель: Разделить на два.

А.С.: Да. Мы любую такую пару посчитали два раза. Один раз, когда мы сначала взяли синий круг, а потом белый. В другой раз мы первым взяли белый круг, а вторым — синий. То есть мы каждую пару посчитали два раза. Поэтому ответ $(15 \cdot 14) : 2 = 105$.

Мы посчитали число имеющихся пар из 15 элементов — «Цэ из 15 по 2», как говорят математики. «Цэ» означает первую букву слова combination (комбинация). См. формулу (1).

$$C_{15}^{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105. \tag{1}$$

Математики любят символы. Но зачем они? Затем, что иначе придется очень много писать. Символы и язык математики нужны, чтобы сокращать запись. Почему древние греки и римляне не дошли до современных высот математики? Потому, что они тратили очень много времени на лингвистическую работу перевода математики в слова (и обратно: слов в математику). А вот когда математика перешла на символы, начался прорыв, о котором я еще расскажу.

Вернемся к нашим змейкам (формула (2))*. Первая из них соответствует измененной позиции, а вторая — исходной:

$$\begin{matrix} (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 14,\ 15,\ 13) \\ (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 15,\ 14,\ 13) \end{matrix} \tag{2}$$

Для каждой пары чисел в каждой строке (а пар всего 105) мы спрашиваем, в правильном ли порядке написаны числа.

Слушатель: Частично да, частично нет.

А.С.: Верно. Например, 1 и 2 — в правильном порядке.

Слушатель: И последующая пара $(2,3)$ — тоже.

А.С.: Да, и следующая, и следующая за ней. То есть $(4,8)$.

Слушатель: В смысле «в правильном порядке»?

А.С.: «В правильном» не значит, что числа в паре соседние: и в $(2,3)$, и в $(2,7)$ — числа в паре расположены в правильном порядке.

Слушатель: По возрастанию.

А.С.: Да, по возрастанию. Большее следует за меньшим. Но, например, пара $(15,13)$ «нарушает порядок», потому что вначале идет большее число, потом меньшее.

Посчитаем количество пар, которые стоят в неправильном порядке. То есть по убыванию.

Слушатель: Простите, но ведь мы сами выбрали такую запись в виде извивающейся змеи. Мы разве не могли записать как-то иначе?

А.С.: Могли. Могли записать иначе, но тогда мы бы не преуспели в доказательстве того факта, который нам нужен.

Математика дает полную свободу исследователю. Когда он провел рассуждение и сказал: «Теперь всё доказано», — он оправдывает всё, что построил. Математик скажет: «Рассмотрим то-то и то-то». Зачем? Ужас, зачем это рассматривать? А потом раз — и всё получилось (невзирая на «ужас»). Математика — самый свободный род занятий. Никакой моды, нет, ничего.

---

*А нет ли тут пар, в которых первое число больше второго? Это непорядок!

Если вы доказали недоказанную гипотезу, то чем бы вы ни пользовались, всё прощается. Победителей не судят (но иногда их слегка журят за сложноватое доказательство).

Итак, зачем я считаю пары и почему так выписал змейку, пока не будет понятно. Мы договорились о некотором правиле. Мы именно так выписываем числа. Вам придется принять это как есть. А дальше я считаю количество пар, которые стоят в неправильном порядке. Раз, два, три, четыре, пять, шесть... (см. рис. 14).

$$(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 14,\ 15,\ 13)$$

Рис. 14. Вылавливание неправильных пар в самом разгаре!

Условно разобьем наш ряд из 15 чисел на 4 группы в соответствии с номером строки. Рассмотрим для начала пару, элементы которой принадлежат разным группам. Ясно, что такая пара обязательно будет «правильной», так как любой элемент из группы слева меньше любого элемента из группы, стоящей правее: у нас группы от 1 до 4, от 5 до 8, от 9 до 12 и от 13 до 15. Значит, «неправильные» пары следует искать внутри групп. В первой и третьей группе всё хорошо, поэтому считать надо только оставшиеся две группы. Во второй группе 6 неправильных пар ($8, 7$; $8, 6$; $8, 5$; $7, 6$; $7, 5$; $6, 5$). В четвертой группе чисел (для змейки, соответствующей измененной позиции) неправильных пар — 2. Итого — 8. А сколько неправильных пар в исходной позиции? (См. нижнюю строку на рис. 15 или в формуле (2) выше.)

Слушатель: 9.

А.С.: Да, 9. Мы находимся на подступах к пониманию. Сейчас я покажу, что никакие изменения пустого места не меняют *четности* количества неправильных пар. Само количество, конечно,

$$(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 14,\ 15,\ 13)$$

$$(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 15,\ 14,\ 13)$$

Рис. 15. В верхней строке — восемь «беспорядков», а в нижней строке — девять.

меняется. У нас оно пока равно 8, однако, если перемешать все фишки, согласно правилам игры «15», то количество неправильно стоящих пар изменится. Но удивительный факт состоит в том, что вы никогда не измените *четности* этого количества. Само количество будет прыгать в сторону увеличения или уменьшения, но только на 2, на 4, на 6, словом, на ЧЕТНОЕ число единиц.

Начнем доказывать это утверждение. Где-то есть пустое место в коробке 4×4 (пусть конфигурация чисел, окружающих его, такая, как на рис. 16).

1	2	3	4
5	6	7	8
9		11	12
13	15	10	14

Рис. 16. И вот нашли пустое поле. Есть разгуляться где на воле!

Пустое место может сдвинуться в 4 направлениях (рис. 17).

Давайте рассмотрим все 4 варианта и посмотрим, что произойдет со змейкой.

Что происходит с выписанной змейкой чисел, если я передвигаю клетку с числом 11 налево?

Слушатели: Ничего.

А.С.: Правда. А что происходит со змейкой, если я передвигаю клеточку с числом 9 направо?

1	2	3	4
5	6	7	8
9		11	12
13	15	10	14

Рис. 17. Витязь на распутье. По какой же дороге пойти?..

Слушатели: Ничего.

А.С.: Ответ верный. Два других варианта немного более сложные, но совершенно однотипные.

Что происходит, когда клетка движется сверху вниз или снизу вверх?

Слушатель: У нас появляются неправильные пары.

А.С.: Да, у нас либо появляются, либо пропадают неправильные пары. Вопрос, сколько таких пар появляется и сколько пропадает? Ответ на этот вопрос зависит от того, где стояло пустое место. И вот здесь придется рассмотреть уже 4 варианта, но не для исходной стандартной змейки, а для *любой*. От самых простых в сторону самых сложных. Например, пусть в третьей строке получилось «9, 10, 11, пусто» (а номер 12 оказался в четвертой строке за счет каких-то предыдущих перемещений) (см. рис. 18).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
13	15	12	14

Рис. 18. Следите только за второй и третьей строкой.

Записываю фрагмент змейки:

$$\ldots 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11,\ \text{пусто}\ \ldots$$

Нас интересует только этот фрагмент, потому что при движении, которое будет совершено, слева и справа в змейке ничего не изменится. Будет меняться только этот набор цифр. Расположение остальных пар не меняется. Внимание: «8» пошло вниз, пустышка — наверх (рис. 19).

1	2	3	4
5	6	7	
9	10	11	8
13	15	12	14

Рис. 19. «Восьмерка» и «пустышка» поменялись местами.

Как теперь будет выглядеть середина змейки? Вот так:

$$\ldots\ \text{пусто},\ 7,\ 6,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11,\ 8\ \ldots$$

Что произошло? Восьмерка из начала группы скакнула в конец. Какие пары свое значение поменяли? Группа из шести чисел $(7, 6, 5, 9, 10, 11)$ целиком сохранилась. Она просто поменялась местами с восьмеркой. Значит, какие пары поменяли, как говорят математики, «свой тип монотонности», то есть возрастание сменилось убыванием (или, наоборот, убывание — возрастанием)?

Слушатель: $(8, 7)$.

А.С.: $(8, 7)$. Здесь теперь $(7, 8)$; а еще?

Слушатель: $(8, 6)$, $(8, 5)$ ...

А.С.: При том движении, которое я произвел, поменяют взаимное расположение чисел только те пары, в которых участвовало число 8. Поэтому 6 пар изменили тип монотонности. Если были возрастающими — стали убывающими, и наоборот.

Рассмотрим каждую пару в отдельности.

Было $(8, 5)$ (числа в порядке убывания), стало $(5, 8)$ — возрастание. Количество неправильных пар изменилось на единицу вниз.

Было $(8, 10)$, стало $(10, 8)$, количество неправильных пар изменилось на единицу вверх. С остальными парами — то же самое. Каждый раз мы добавляем или вычитаем единицу. Не может быть, чтобы где-то (вместо плюс/минус единицы) получился нуль, так как среди указанных шести чисел нет восьмерок (ведь каждое число, написанное на фишке, единственно).

Вне зависимости от знаков, количество изменивших тип монотонности пар всегда четно. Имеется 64 способа расставить знаки, но в результате всегда в качестве суммы получится четное число. Соседние плюс/минус единички либо добавят к сумме 2, либо добавят (-2), либо взаимно уничтожатся, давая ноль:

$$\pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1$$

В каждой паре соседних плюс/минус единичек получится или 0, или 2 или -2. То есть общее изменение количества «неправильных пар» может произойти на 6, 4, 0, -2, -4, -6.

Изменения происходят на четную величину, поэтому исходное количество «беспорядков» (оно было равно 8) могло стать числом 14, если все единички оказались бы с плюсом, могло остаться 8 (если бы было $+1$, $+1$, $+1$, -1, -1, -1). Могло стать 6, могло 4 или 2. Но никак не могло стать ни 5, ни 7.

В принципе, на этом месте я мог бы сказать «остальное проверьте сами», потому что в других случаях передвижения пустой фишки происходит ровно тот же самый эффект. Но давайте для аккуратности проверим что-нибудь еще. Например, вверх могло пойти число 14 (вместо того, чтобы опустить вниз число 8) (см. рис. 20).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	14
13	15	12	

Рис. 20. Еще один способ «освоения» пустого поля.

Что произойдет, где начались изменения? Только в нижних двух строках. Было 1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, а потом вместо 9, 10, 11, 14, 12, 15, 13 мы увидели 9, 10, 11, 14, 12, 15, 13. Ничего вообще не изменилось.

Давайте теперь представим себе внутреннюю пустую фишку. Скажем, если в позиции на рис. 18 клеточку 11 сдвинули к краю, а 7 сдвинули вниз (рис. 21):

1	2	3	4
5	6		8
9	10	7	11
13	15	12	14

Рис. 21. Семерка «переселилась» с 3-го этажа на 2-й.

Выпишем змейку до того, как подвинули 7:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ (8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11),\ 14,\ 12,\ 15,\ 13.$$

Теперь я двигаю 7 вниз и получаю вот такой фрагмент змейки:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 6,\ 5,\ 9,\ 10,\ 7,\ 11\ \ldots$$

Выделяю в змейке группу, которая менялась.

Было: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ (7,\ 6,\ 5,\ 9,\ 10),\ 11,\ 14,\ 12,\ 15,\ 13.$

Стало: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ (6,\ 5,\ 9,\ 10,\ 7),\ 11,\ 14,\ 12,\ 15,\ 13.$

6, 5, 9, 10 переехали на шаг левее, а 7 через них перепрыгнула. Сколько будет изменений? Ровно 4. Пары опять поменялись. Правильные стали неправильными, и наоборот. Опять каждый раз мы прибавляем или отнимаем единицу. И так 4 раза. А 4 ведь — четное число, вот незадача. Опять результат меняется на четное число.

Что мы можем еще сделать? Мы могли вместо 7 подвинуть 12 (рис. 22). Тогда 12 прыгнет за пару $(11, 14)$. Изменятся ровно две пары.

Слушатель: То есть нечетное число поменяться не может.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	12	11
13	15		14

Рис. 22

А.С.: Ни при каких условиях. Мы уже знаем, что движение по горизонтали — бессмысленно. Получится та же самая змейка. Если мы движемся сверху вниз, то количество неправильных пар меняется либо на 2, либо на 4, либо на 6, либо ничего не меняется. Можно честно перебрать все возможные переходы снизу вверх. Можно просто понять, что никаких других вариантов, кроме четных, нет. То есть в пятнашку выиграть нельзя, потому что в стандартной исходной позиции количество неправильных пар 8, и изменить его можно только на четное число. А в требуемой позиции имеется 9 неправильных пар.

Слушатель: Из любой ли позиции выиграть невозможно?

А.С.: Почему? На самом деле из половины всех исходных позиций. Из половины невозможно, из половины возможно. Потому что в «высокой» математике учат, что половина последовательностей имеет четное число неправильных пар, а половина — нечетное*. Поэтому половина вариантов будет собираться в стандартную исходную позицию. Если пятнашки как угодно перемешать, вывалив из коробки и затем вставив обратно как придется, то перестановкой фишек всегда можно прийти либо к случаю «13, 14, 15», либо к случаю «13, 15, 14».

Чтобы понять, можно ли привести фишки в исходную позицию, нужно посчитать количество неправильных пар в змейке, соответствующей изучаемой исходной позиции. Если оно нечетное — привести к исходной позиции можно. Если четное — то нельзя.

Слушатель: Какие числа можно поменять местами?

Другой слушатель: Например, 1 и 3 можно поменять?

---

*Это утверждение требует доказательства и является далеко не очевидным. Тут как раз поможет «искусство игры в пятнашку».

А.С.: Если я меняю 1 и 3 местами (было 1, 2, 3, — стало 3, 2, 1), то как изменилась четность? Было отсутствие беспорядков (то есть 0), стало три беспорядка. Четность, стало быть, *изменилась*. Так что поменять в игре «пятнадцать» 1 и 3 местами, сохраняя остальные фишки на своих местах, тоже невозможно. Ваши вопросы относятся к *теории групп*, основе современной алгебры. Что и как можно поменять, чтобы четность менялась — этот вопрос напрямую к теории групп*. Почему ровно половина позиций имеет четное количество беспорядков? Это тоже связано с некоторым фактом из теории групп. Сейчас я продолжу развивать эту тему. Рассмотрим «кубик Рубика». Венгерский инженер Рубик достойно продолжил дело, начатое Сэмом Лойдом.

Давайте разберем этот кубик и соберем его обратно.

Слушатель: По-моему, есть даже какие-то соревнования на этот счет.

А.С.: На соревнованиях надо собрать тот, который теоретически возможно собрать. Под словом «разобрать» я понимаю более радикальную операцию: «разодрать».

Как только мне купили кубик Рубика, я сразу его разодрал. Потому что мне было интересно, любую ли позицию можно привести к исходной. Мне было это настолько долго интересно, что на мехмате МГУ я решил соответствующую задачку в качестве зачета. Возможно (если мне не изменяет память) 12 разных расположений, не переводящихся друг в друга. В пятнашках — 2, а для кубика Рубика — 12 ситуаций. Это тоже следует из теории групп (по которой я и сдавал зачет).

Если перевернуть угловой кубик в кубике Рубика путем принудительного «раздирания» и восстановления его формы — его нельзя будет собрать. Если перевернуть центральный кубичек в ребре — тоже нельзя. Если поменять местами два кубика малой «диагонали» любой грани — опять не получится. Эти изменения и все их сочетания задают набор различных позиций кубика Рубика, которые нельзя собрать. Однако это — трудная задача.

---

*Его можно задавать не только для игры в «пятнадцать».

А теперь поговорим про мяч (рис. 3). То есть, как ни странно, снова про математику.

Математика состоит из двух важных составляющих: что такое число, и что такое доказательство. Моя старшая дочка не могла в свое время решить задачу: есть 3 апельсина и 2 яблока, сколько всего фруктов? Она совершенно не понимала, как можно сложить яблоки с апельсинами. Это же совершенно про разное. Мне кажется, что это типичное гуманитарное мышление. Человек фокусируется на содержании объекта и не может от него уйти. А вот старший сын решал эту задачу, когда ему было два с половиной года. Я ему говорил: «У тебя было 3 грузовика и 2 легковушки...» — «Ой, пап, давай просто $3+2$*, — зачем всё это... ерунда... Говори три и два, и будем складывать». Ведь что такое число? Число — это умение абстрагироваться от объекта. Говорят, в каких-то таежных культурах, где-то далеко на востоке Сибири, имеются до сих пор разные числительные для обозначения, например, количества белых медведей и количества деревьев. У них формализация числа 5 как выражающего общность пяти медведей и пяти сосен еще не произошла. На осознание того, что у 5 медведей и 5 сосен есть общее, человечество потратило много тысячелетий. И в тот момент, когда это осознание настало, началась математика. А на память об этом процессе в русском языке до сих пор говорят «сорок» вместо «четырьдесят», хотя раньше можно было сказать «сорок собольих шкурок», но не «сорок деревьев».*

А теперь рассмотрим поближе футбольный мяч. Он состоит из шестиугольников и пятиугольников: двадцати шестиугольников и двенадцати пятиугольников.

Зачем? Почему так сложно? Вот вы, допустим, шьете футбольные мячи, чем вам не угодили просто шестиугольники? Взяли, сшили их по краям. Плоскость, например, отлично замощается шестиугольниками.

Слушатель: Но они, может быть, в мяч не сложатся.

А.С.: Давайте попробуем сложить огромный мяч. Возьмите 200, 300 шестиугольников. Плоскость-то элементарно замощается? Вот так, как я нарисовал. Пчелиные соты (рис. 23).

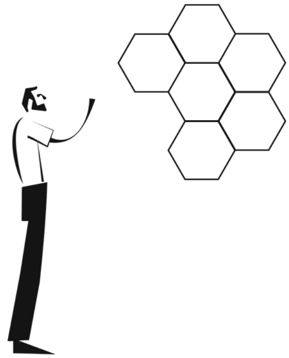

Рис. 23. Пчелы — они тоже математики (сами того не зная...).

Слушатель: Они на стыках не будут совпадать.

А.С.: Ну тут-то, на плоскости, вроде всё совпадает. А потом взял, свернул очень большой кусок плоскости и получил мяч.

Слушатель: Не остается места для того, чтобы правильно согнуть.

А.С.: Я даже не знаю, как выразить простым языком Ваше правильное интуитивное замечание. Но математическая теория этого вопроса неумолима. Из шестиугольников *нельзя* собрать поверхность шара. Вообще, никак, никаким способом — даже если их нарисовать на поверхности шара в слегка искривленном виде*.

Слушатель: А из пятиугольников?

А.С.: Сейчас мы проясним ситуацию, связанную с пятиугольниками. Во-первых, давайте договоримся о том, что сшивать надо так, чтобы в каждой вершине сходилось три образующих поверхность мяча многоугольника. Будем называть такую сшивку *регулярной.* Сразу скажу, что никакой, регулярной ли, не регулярной,

*Арсению Акопяну это удалось; см. http://pub.ist.ac.at/ ~edels/hexasphere/. Обратите внимание на дату публикации :-)))).

никакой сшивкой из шестиугольников нельзя сшить футбольный мяч. Но давайте сейчас рассмотрим подробно регулярные сшивки. Возьмем всевозможные футбольные мячи, любого размера, которые составлены из пятиугольников и шестиугольников.

Неожиданная теорема:
Если поверхность шара «сшита» регулярным образом из некоторого количества x шестиугольников и некоторого количества y пятиугольников, то y обязательно равно 12.

Слушатель: В любом случае?

А.С.: В любом. Как ни экспериментируй, что ни делай, чему бы x ни равнялось. $x = 200$, $x = 300$, ... Но $y = 12$. Ровно 12, не 12 000, не 120. От размера мяча не зависит, от размера лоскутков не зависит, от того, как сшивать, не зависит. Это — математическая теорема.

Слушатель: Невероятно...

А.С.: Есть абсолютное доказательство этой теоремы. Если вы хотите сшить футбольный мяч из пятиугольников и шестиугольников, пятиугольников обязательно будет ровно 12.

Слушатель: Какой диаметр?

А.С.: Не важно: ни диаметр, ни размер лоскутков, ни то, как сшивать. Вы никогда не сошьете ничего другого. Какие бы приказы не издавала... ну, скажем, фабрика «Спортинвентарь». Скажем, придет к власти новая футбольная партия и скажет: «Отныне сшивать мячи так, чтобы в них было поровну шестиугольников и пятиугольников». Тогда их обязательно будет 12 к 12.

Слушатель: То есть такое тоже может быть? Прямо 12 к 12?

А.С.: Да. А знаете, как еще может быть? Ноль шестиугольников и 12 пятиугольников. Ни одного шестиугольника, одни пятиугольники.

Слушатель: А зачем тогда шестиугольники?

А.С.: Видимо, для того, чтобы мяч был гладкий. Ноль шестиугольников — 12 пятиугольников. 200 шестиугольников — всё равно 12 пятиугольников.

Слушатель: Скажите, а вот эта теорема появилась уже после футбольного мяча? Или футбольный мяч появился раньше?

А.С.: Футбольный мяч появился «чуть-чуть» раньше. Если честно, теорему эту полностью осознали примерно 150 лет назад. Но этот результат, как и очень многие другие, должен быть отнесен к Эйлеру. Леонард Эйлер жил больше половины жизни в Петербурге и похоронен там же на Смоленском лютеранском кладбище. Он ввел в математику понятие *инварианта*. Эйлер показал, что есть в математике такие вещи, которые не меняются, что бы ты ни делал. И настоящая математика — это поиск таких вещей. Эйлер доказал потрясающую по красоте формулу, сейчас я ее нарисую, а может быть, даже докажу. Кстати, есть такой архитектурный объект «Монреальская Биосфера» или геодезический купол, созданный Ричардом Фуллером Бакминстером. Гигантский сегмент шара, чуть больше, чем полушар, составленный из маленьких шестиугольников. Я, когда его увидел, сказал: «Нет. Нет. Нет... Вы не правы, там не могут быть все шестиугольники, либо он сильно искривлен, либо там где-то живут пятиугольники. Ищите».

Мне говорят: «Алексей, как вы это угадали? Мы нашли 5-угольники». Эта конструкция не полный шар, поэтому в ней не 12, а примерно 7 пятиугольников. Как же я узнал? Теорема, математика. Она же универсальная для всего. Что абсолютно одинаково в России, в Канаде и в Америке? Только математика.

Слушатель: Положение этих пятиугольников, оно тоже определено?

А.С.: Нет. Можно их все сцепить в одном месте. Только получится сильно искривленная форма. Лучше пятиугольники разнести. Пятиугольники отвечают за искривление. А что такое искривление? Беру Земной шар и рисую на нём треугольник (рис. 24).

На Земном шаре есть где развернуться. Одну из вершин возьмем на Северном полюсе, две другие — на экваторе. А сторонами треугольника, как и положено в геометрии, будем считать отрезки двух меридианов и отрезок экватора (ведь по ним измеряется кратчайшее расстояние между точками на земной поверхности!).

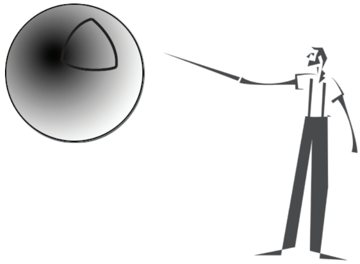

Рис. 24. Сейчас мы заколдуем этот треугольник на сфере, и у него все три угла будут прямыми.

Вот и получился у нас равнобедренный треугольник, у которого оба угла при основании *прямые.* А угол при Северном полюсе — любой. Так давайте возьмем его тоже прямым!!!

У нарисованного нами треугольника все углы прямые. Такого не бывает на плоскости. Это геометрия шара, поверхности шара, и вот с этой геометрией связан рассматриваемый нами факт. Он открывает очень глубокую теорию — дифференциальную геометрию, а также теорию римановых многообразий. Вернемся к футбольному мячу, состоящему из x шестиугольников и y пятиугольников, и к нашей «неожиданной теореме».

Слушатель: Кратен ли x чему-нибудь?

А.С.: «x» может быть равен чему угодно. А вот «y» обязательно равен 12.

Слушатель: То есть четное, нечетное — не важно.

А.С.: Абсолютно.

Слушатель: То есть мы можем сделать шар из 130 шестиугольников и 12 пятиугольников, или из 131 и 12?

А.С.: Да, надо подумать и аккуратненько вклеить эти наши 12 пятиугольников.

Слушатель: А связано ли это с количеством сторон в пятиугольнике и в шестиугольнике?

А.С.: Безусловно. Терпение, доказывать этот факт мы будем позже. Пока что нам нужна подготовительная работа, проделанная математиком Эйлером. Леонард Эйлер обнаружил следующий факт. Что такое *многогранник*, каждый понимает. Любой многогранник — это как бы изломанная поверхность шара. Эйлер нарисовал многогранник на шаре: спроецировал ребра и вершины многогранника, лежащего внутри шара, на поверхность шара. (Слово «спроецировал» означает следующую процедуру: расположил внутри стеклянного шара макет многогранника, сделанный из проволочек, и зажег в центре шара маленькую лампочку. На поверхности шара будут видны тени от ребер — это и есть проекции ребер.)

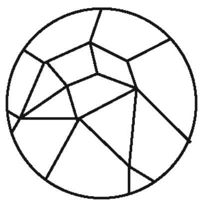

Рис. 25. Повторяя путь Эйлера, нарисуем на шаре многогранник.

И с помощью этого приема доказал замечательную теорему с совершенно удивительной формулировкой. Называется теорема «Формула Эйлера для многогранника».

Пусть у многогранника будет: В — количество вершин, Р — количество ребер, Г — количество граней. Эти количества можно непосредственно подсчитать, глядя на модель многогранника. Тогда обязательно будет

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2.$$

Независимо от того, какой мы взяли многогранник. Теорема верна и для куба, и для тетраэдра (рис. 26), и для любого другого многогранника, имеющего границей «изломанную поверхность шара». Всегда это выражение будет равно 2.

Тетраэдр — это любая треугольная пирамида. Раньше в такой форме делали молочные пакеты. Давайте посчитаем у молочного

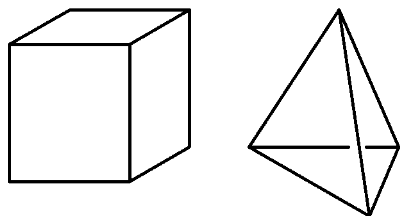

Рис. 26. Слева — куб (невидимые линии не изображены), справа — тетраэдр из проволоки.

пакета количество вершин, ребер и граней. Сколько вершин у молочного пакета?

Слушатель: 4.

А.С.: В = 4. Сколько ребер у нашего тетраэдра?

Слушатели: 6.

А.С.: Без сомнения. А граней?

Слушатели: 4.

А.С.: Верна формула? $4 - 6 + 4 = 2$. Верна.

А теперь рассмотрю другую пирамиду — четырехугольную (рис. 27).

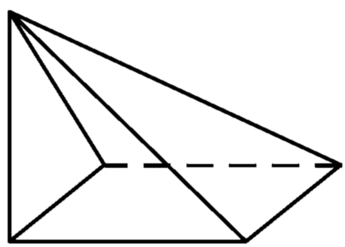

Рис. 27. Схема 4-угольной пирамиды.

У нее 5 вершин, 8 ребер и 5 граней. Формула верна: $5-8+5 = 2$.

Слушатель: А количество вершин и граней всегда совпадает?

А.С.: Нет, ни в коем случае не всегда. Давайте посмотрим на куб (рис. 26, слева).

У обычного куба — 8 вершин, 12 ребер и 6 граней. (Бывают еще и необычные кубы... например, 4-мерные.)

Снова получаем два: $8 - 12 + 6 = 2$.

Никуда от этой формулы не денешься. Думаю, что до Эйлера эту закономерность тоже кто-то замечал, но важно не первым заметить, а громко об этом заявить. Так сказать, довести до сведения широких масс.

Не буду сегодня ничего больше доказывать. Вместо этого я расскажу о некоторых великих математических загадках прошлого.

Давайте вспомним формулу для решения квадратного уравнения с коэффициентами a, b, c:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

На самом деле не очень важно, как конкретно она выглядит. Важно то, что это — универсальный метод решения квадратного уравнения. Какие бы они ни были, эти a, b и c, если действие произвести, вы получите какое-то число.

Тут есть две точки зрения на эту ситуацию. Если написана некоторая формула, то она может случайно оказаться верной для каких-то чисел a, b, c, то есть для какого-то квадратного трехчлена. Для одного случайно оказалась верной, для другого оказалась верной. Сколько раз нужно проверять, чтобы точно сказать, что она всегда верна? Бесконечное количество раз. Но можно сделать иначе. Можно взять эту формулу, подставить в исходное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

и *убедиться* в том, что всё сократится, и вместо символов a, b, c слева возникнет ноль. Это и будет означать, если мы верим в язык символов, что формула верна. У нас всё сократилось, в любом случае, какие бы a, b, c мы ни взяли.

Слушатель: Простите, а для чего нужна эта формула?

А.С.: Для чего она нужна? Ну, я бы сказал так. Лично для меня ответ такой: для красоты. Для того, чтобы быть уверенным, что математика может дать какие-то универсальные рецепты вычислений. Сейчас, конечно, компьютеры решают задачи посложнее этого уравнения, но раньше она была нужна для быстрого вычисления.

Вы распределяете земельные участки, измеряете какие-то прямоугольные куски, у вас получается квадратное уравнение. Можно медленно прикидывать, как это сделать, а можно быстро получить ответ.

Слушатель: То есть практическое применение какое-то было?

А.С.: Ну, раньше — да. Дальше эта идея развивалась так. А что, если я напишу уравнение:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0?$$

Могу я написать универсальную формулу, с помощью которой можно вычислить x? При этом разрешается складывать, вычитать, умножать, делить и даже извлекать корни, причем любой степени. Но больше ничего не разрешается.

Слушатель: От куба и дальше такого сделать нельзя.

А.С.: Можно; но эту формулу не изучают в школе. Формула для кубического случая была придумана в первой половине XVI века. Несколько математиков работали над этой проблемой одновременно. Сейчас формула носит имя Джироламо Кардано, но он не придумал ее, а опубликовал метод другого математика (т. е. «громко об этом заявил»).

Чтобы выписать эту формулу, мне понадобится целая доска, поэтому я не буду этого делать. Как только поняли механизм решения кубического уравнения, сразу придумали формулу для решения уравнения четвертой степени. Она была еще страшнее. Вывел ее ученик Кардано, по фамилии Феррари. Всё это происходило в XVI веке, когда математики уже свободно обращались с буквами, поэтому был сформулирован самый общий вопрос. Можно ли написать формулу для решения уравнения произвольной степени:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

($a_n, a_{n-1}, \ldots$ — известные числа. Так обозначают для удобства. А то вдруг не хватит букв алфавита для их обозначения?)?

Пусть она займет 10 досок, пусть она займет 100 досок. Погоня за этой формулой продолжалась до конца XVIII века. А в самом начале XIX века прозрение спустилось на несколько человек сразу, из которых самым главным я считаю французского математика Эвариста Галуа (хотя первым ситуацию в общих чертах осознал Жозеф Луи Лагранж). Было доказано, что никакая конечная формула не может быть решением уравнения произвольной степени. Такой формулы не существует. Не потому, что люди еще глупые или не все формулы перебрали или, может быть, они не так ставили корни. Никакое выражение, содержащее плюс, минус, умножить, разделить и извлечь корень любой степени не может при подстановке в уравнение $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ полностью сократиться. Это — математически строгий результат начала XIX века*.

Еще очень известна теорема Ферма. Доказательство теоремы Ферма — это примерно 120 страниц трудного текста для очень посвященного человека.

Про нее мы поговорим потом, а сейчас просто запишем ее формулировку. Она очень простая.

Ни для каких целых чисел x, y, z, отличных от нуля, и никакого натурального n, большего 2, не может выполняться равенство:

$$x^n + y^n = z^n.$$

Эту теорему доказывали с 1637 по 1994 год. Впоследствии были решены еще две или три величайшие математические проблемы прошлых веков. Сейчас математика пожинает плоды всего своего существования.

Слушатель: Это сделано с помощью компьютеров?

А.С.: Нет. Единственное, что сделали с помощью компьютера — это так называемая «проблема четырех красок». XX век — прорыв в авиации, в космосе. Но самый большой прорыв в это время был в математике. В ней перевернули всё вверх дном: сняли кучу гипотез, превратили их в теоремы. На моей памяти сняли несколько проблем, которые стояли веками, если не тысячелетиями.

---

*Более того, никакая формула не может дать универсального ответа, даже если не требовать «буквенного сокращения»!

Слушатель: А это правда, что у теоремы Ферма нет практического применения?

А.С.: А кто его знает? Она (точнее, метод ее доказательства) может иметь некоторое отношение к физической модели мира. На самом деле, последнее, что интересно математику, это то, какое у теоремы практическое применение. Математика в каком-то смысле сродни настоящей религии. Это вещь в себе. Если она кому-то помогает, математиков это особо не интересует. Люди, которые занимаются прикладной математикой, имеют совершенно другое настроение. Это — другие люди. Как, например, разнятся между собой учителя и чиновники. То же самое с математиками. Человек, который формулу ищет, и человек, который хочет с помощью нее что-то сделать, — это два разных человека.

На этом мы закончим первую лекцию. На следующем занятии мы будем доказывать теорему про футбольный мяч и формулу Эйлера.

Лекция 2

А.С.: Сегодня мы займемся тем, что называется *топологией*. Многие считают ее центральной наукой в математике. Математика — это центральная наука во всех науках. Топология получается тогда как бы «центром внутри центра», то есть самой главной дисциплиной. Она сформировалась в начале XX века, и постепенно стало ясно, что она лежит в сердце математики. На простом языке, топология — это геометрия плюс анализ. А можно сказать и по-другому: тот, кто хочет понять самые глубокие и важные закономерности и геометрии, и математического анализа, должен изучать эти науки с топологической точки зрения.

100 лет назад топология уже достаточно хорошо оформилась, а началась она, наверное, с Эйлера (того самого Эйлера, формулу которого мы сегодня будем с вами изучать). Были сформулированы определения важнейших объектов топологии: *линия, поверхность, объём, многомерное пространство. Было осознано, что у топологических объектов имеется важное свойство:* ***размерность.*** Например, линия — это одномерный объект (его можно при этом поместить в 1-мерное пространство, в 2-мерное, в 3-мерное и даже в так называемое «4-мерное пространство»). Поверхность — двумерный объект (он может располагаться в 2-мерном пространстве, в 3-мерном, 4-мерном и так далее). Тело, имеющее положительный объём — это 3-мерный объект; но оно может располагаться в 3-мерном, 4-мерном, 5-мерном... пространствах. Ниже всё это будет рассматриваться в самых простых случаях, поскольку свойства топологических объектов, лежащих в 4-мерном, 5-мерном, 6-мерном... пространствах недоступны непосредственному геометрическому восприятию человека. Может быть, это хорошо, что человек не может совершить даже небольшую и короткую по времени прогулку в «подлинное» 4-мерное пространство. Вернувшись из такой прогулки, этот бедняга мог бы с ужасом обнаружить, что сердце у него теперь находится не с левой, а с правой стороны (и ему, кроме того, придется примириться с тем фактом, что он стал левшой, хотя ранее им не был). Так

что с 4-мерным пространством шутки плохи. Но и в 3-мерном пространстве (казалось бы, так хорошо нам знакомом) топология сумела обнаружить ряд совершенно сногсшибательных фактов. Приступим же к ее изучению (конечно, на общеописательном уровне, не достигая стопроцентной строгости изложения).

Допустим, у вас есть глобус, или футбольный мяч, или арбуз. Это объекты по сути разные, а по форме они одинаковые. Как говорится на житейском языке, это тела, которые имеют форму шара. Однако с точки зрения топологии арбуз резко отличается от глобуса и от футбольного мяча: арбуз внутри заполнен веществом, а глобус и мяч внутри пустые. Разумно считать, что толщина картонной поверхности глобуса и толщина оболочки мяча имеют нулевую толщину. Тогда глобус и мяч являются двумерными объектами, а арбуз — трехмерным. Но можно мысленно рассматривать поверхность арбуза — получится «двумерный объект, ограничивающий исходный трехмерный арбуз». Ниже мы будем говорить просто о поверхности шара (неважно, какого диаметра). Допустим, что мяч имеет диаметр 20 см, поверхность арбуза — диаметр 50 см, а глобус — 200 см. Для лучшего понимания, что такое топология, рассмотрим также кубик со стороной 20 см, склеенный из бумаги, и таких же размеров кубик, сделанный из кусочков проволоки, идущих вдоль ребер куба. Итого у нас имеется пять объектов. С общежитейской точки зрения их можно разделить на две группы — «круглые» (3 шт.) и «кубообразные» (2 шт.). С точки зрения человека, привыкшего всё измерять сантиметром (например, портного), их надо разделить на две группы по другому принципу: «предметы с размерами порядка 20 см» (3 шт.) и «более крупные предметы» (2 шт.). А с точки зрения математика-тополога, здесь имеются четыре **абсолютно одинаковых** предмета и один особенный (а именно, проволочный куб). И тополог даже даст обоснование, почему он так считает: первые четыре объекта являются двумерными, а последний объект — одномерный. Таким образом, топология не только не видит разницы между поверхностью шара диаметра 20, 50 или 200 см, *но и не видит разницы между поверхностью* *куба и поверхностью шара!* Итак, тополог надевает на себя «волшебные очки», которые не позволяют определить ни размеры, ни форму предметов. Что же он тогда через них сможет разглядеть? *Он сумеет разглядеть самое глубинное отличие представленных ему предметов друг от друга, их, так сказать, конструкцию.* Например, добавим к этим пяти предметам еще и бублик с внешним диаметром 20 см и будем интересоваться не самим бубликом, заполненным тестом, а только его поверхностью. А также добавим обыкновенное кольцо из проволоки (диаметром 1 см). Что скажет тогда тополог? «С точки зрения размерности здесь имеется два типа объектов: двумерные и одномерные. Но поверхность бублика резко, принципиально отличается от поверхности шара. Точно так же проволочный кубик резко отличается от кольца из проволоки. Итак, здесь представлены **четыре** различных топологических типа: поверхность шара (4 предмета), поверхность бублика, окружность, проволочный кубик».

Врезка 1. Упражнение для слушателей (необязательное; но ответ полезно прочесть)

Во времена фашистской Германии в ней процветали ученые-шарлатаны. Один из них на полном серьезе утверждал, что всё космическое пространство вокруг Земли заполнено… льдом. (То есть, что мечтать о космических полетах бессмысленно.) Ну, допустим, это так и есть. Хм. Рассмотрим тогда три объекта: поверхность Земли, внутренность Земли и наружная часть Земли, состоящая, хм, изо льда. Как называются эти объекты на языке топологии? Одинаковы ли с точки зрения топологии второй и третий объект?

ОТВЕТ. Первая часть ответа: первый объект — двумерный, типа сферы. Не имеет граничных точек.

Второй объект: 3-мерный, типа шара. Его граничные точки — все точки поверхности Земли.

Третий объект: 3-мерный, типа шарового слоя. Граничные точки — все точки поверхности Земли.

Вторая часть ответа: второй и третий тип топологически различны, так как шаровой слой существенно отличается от шара. Граничные точки у них тем не менее **одинаковы**.

Третья часть ответа: не следует говорить, что третий объект «бесконечный по размерам», так как в топологии неважно, каковы размеры объектов. Например, если взять поверхность сферы и выкинуть из нее одну-единственную точку, то по житейским представлениям этот объект «конечный по размерам», в то время как плоскость «бесконечна». По правилам же топологического исследования, сфера с «выколотой» точкой имеет тот же топологический тип, что и плоскость.

Возьмем и *изогнем, изомнем, растянем* поверхность шара, но нигде *не порвем*, и *не склеим* никакие две точки в одну. Мы можем из нее таким образом получить, например, куб (то есть, естественно, не сам куб, а его поверхность). Чтобы понять, как это делается, покажем, как из круга, изготовленного из резины, получить квадрат (размеры квадрата неважны). Для этого надо в четырех равноудаленных местах границы круга потянуть наружу резиновый слой, пока он не примет форму квадрата. В частности, точки границы круга превратились в точки периметра квадрата.

Можно много чего сделать из резиновой камеры сдутого футбольного мяча. Но есть *интуиция*, которая подсказывает, что автомобильную (или велосипедную) камеру из камеры футбольного мяча сделать будет затруднительно, даже используя те широкие возможности, которые предоставляет нам топология. Куб, эллипсоид (то есть сжатая поверхность сферы), яблоко, арбуз — пожалуйста, а вот бублик из шара не сделаешь, не порвав его, либо не склеив между собой некоторые точки. Согласно сказанному выше, надо различать две разные задачи: 1) *Из заполненного шара сделать заполненный бублик* и 2) *Из поверхности шара сделать поверхность бублика.* Первая задача «решена» в подписи к рис. 28.

И Эйлер задался вопросом, а можно ли это утверждение доказать? Вроде бы интуитивно оно совершенно понятное. Но матема-

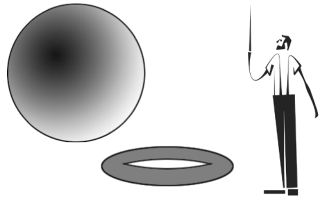

Рис. 28. Слева — шаровой кусок теста, справа — бублик из теста. Пекарь (или лектор?) взял левый кусок теста, раскатал его так, чтобы из него получился удлиненный цилиндр (в топологии заполненный цилиндр неотличим от заполненного шара), согнул его и слепил концы этого цилиндра. Вот и получился из шара бублик... Стоп-стоп. Слеплять (то есть склеивать точки) нельзя! Тип объекта изменился.

тика ставит задачу перевести очевидное на язык строго доказанного. Ведь если мы откроем цивилизацию, которая, например, живет на плоскости, для ее жителей будет не очевиден рассматриваемый нами факт (см. врезку 2). А с помощью математики мы сможем передать им содержание теоремы. К чему я клоню?

Врезка 2. Эйнштейн — о топологии

Однажды А. Эйнштейна попросили совсем кратко, на понятном любому языке, пояснить, в чем состоит суть сделанных им открытий. Он ответил: все мы, люди, словно маленькие жучки с завязанными глазами, ползающие по поверхности большого мяча и воображающие, что двигаемся по плоскости. Я же первый понял, что мир, в котором я живу, *искривлен.* Но пока не совсем понятно, как именно он искривлен. (То есть, «по-научному», каков топологический тип космоса.)

А вот к чему. Несколько лет назад математик Г. Перельман установил похожий факт, но только в пространстве больших измерений. Факт про фигуры в многомерном пространстве, которые локально похожи на искривленное трехмерное пространство. Мы живем в трехмерном пространстве, мы четвертого измерения не видим и не чувствуем. Мы можем только рассуждать, что четвертое измерение — это время, но объять его взором не можем. Поэтому мы не можем говорить так спокойно и убежденно, что сделать из шара тор в пространстве больших измерений нельзя. (Ведь в 4-мерном пространстве, как указывалось выше, МОЖНО, не нарушая правил топологии, превратить незаметным образом человека с сердцем, расположенным слева, в человека с сердцем, расположенным справа.)

Нам нужен язык, на котором это можно доказать. И вот для того, чтобы это можно было доказывать, для того чтобы через много лет Перельман смог доказать «гипотезу Пуанкаре» (после того как ее доказали, она вместо гипотезы Пуанкаре стала называться теоремой Перельмана или Пуанкаре — Перельмана), Эйлер начал большой путь. Он перевел то, что мы с вами считаем очевидным, в точное, железобетонное математическое рассуждение. Как же он это сделал? Он нарисовал на поверхности шара, мяча, арбуза, глобуса, любого круглого объекта некоторую карту. Иными словами, некий искривленный многогранник (рис. 29).

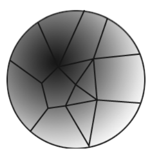

Рис. 29. Начало большого пути в топологию.

С точки зрения топологии, любой многогранник — это тоже шар. Тетраэдр — это шар, куб — это шар, октаэдр, любой параллелепипед — это всё шары. Например, потому что если их выполнить из резины и надуть, то получится футбольный мяч, то есть шар. Но до работ Эйлера еще не было «точки зрения топологии», так как не было и самой топологии.

Эйлер «чувствовал», что все эти объекты *одинаковые.* В чём именно? И как это объяснить остальным людям? В особенности его интересовал вопрос: как доказать, что поверхность шара, поверхность бублика, поверхность кренделя *неодинаковые?** В ответ на первый вопрос ясность позже внес Анри Пуанкаре (после того, как Огюст Коши внес должную ясность в вопрос, что такое «непрерывная функция»). Однако Эйлер сразу обратился ко второй задаче (о доказательстве неодинаковости двух поверхностей) и блестяще решил ее.

Эйлер сделал следующее. Он нанес на поверхность шара многогранник — картиночку «стран», причем страны необязательно треугольные (рис. 30). (Если говорить о «странах», то надо помнить, что рассматривается «Земной шар», не содержащий морей и океанов.) При этом вся поверхность шара должна быть покрыта многоугольниками.

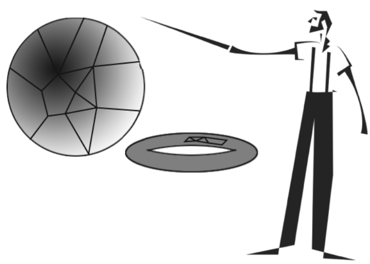

Рис. 30. А вы не пробовали жить на «Земном шаре» в форме огромного бублика? А заметили бы жители, что это не шар, если бы небо всегда было закрыто беспросветными тучами?

Главное, чтобы каждая страна была простым плоским объектом, без дырочек, — как круг или квадрат. И далее он сделал то же самое с велосипедной камерой. Нанес такой многогранник, который является как бы «остовом» каретного колеса (машинных колес в то время еще не было!). При этом вовсе не обязательно, чтобы количество и вид граней, а также количество вершин и ребер этого многогранника для шара и для колеса были одинаковы.

*Мы не можем знать этого наверняка, но мне кажется, Эйлер просто не мог пройти мимо такого вопроса!

Более того, они и не могут быть одинаковыми (как мы увидим ниже).

А потом стал считать у этих многогранников эйлерову характеристику: величину $В - Р + Г$.

Число вершин минус число ребер плюс число граней. Как бы мы ни мяли и ни изгибали шар, наши грани — «страны» от этого не меняются. (Но, конечно, нельзя так смять страну, чтобы она вся превратилась в отрезок. Такого даже во время наполеоновских войн не происходило! А если говорить серьезно, то отрезок — одномерный объект, а страна — двумерный.) То есть вершины остаются вершинами, ребра — ребрами, а грани — какими были (например, изогнутым пятиугольником или треугольником), такими и остались. А значит, величина $В - Р + Г$ не меняется. Теперь считаем эту величину на колесе (по науке поверхность колеса (или бублика) называется словом «ТОР». А тор, заполненный внутри, называется *полноторием*. Поверхность же шара называется, как известно, *сферой*). И если сфера может перейти в тор, то картинка на шаре перейдет в картинку на колесе. И, значит, их эйлерова характеристика должна быть одинакова.

Докажем, однако, что у любой фигуры, нарисованной на колесе, эйлерова характеристика равна 0, а у любой фигуры на шаре — равна 2.

Слушатель: А если бы получилась одна и та же цифра, то что?

А.С.: Мы не смогли бы сделать из этого никакого вывода. Мы бы не смогли сделать вывод, что они одинаковые, но не смогли бы сделать и вывод, что они разные. Но ведь есть и другие подходы, кроме формулы Эйлера. Для более сложных случаев.

Слушатель: Понятно.

Слушатель: А как взаимосвязаны картинки на торе и шаре?

А.С.: То есть как именно они друг с другом соотносятся? Никак. Каждая из картинок, независимо друг от друга, является как бы «сетью», наброшенной на данную поверхность. Эту сеть при желании можно сделать состоящей из треугольных ячеек. Тогда она называется «триангуляцией поверхности».

Слушатель: А не может быть такого, что будет то же самое количество вершин, ребер и граней, но при этом картинка будет другая?

А.С.: Смотря, что понимать под словом «другая». Она может, безусловно, немного иначе выглядеть: ребра могут быть длиннее или короче. Но мне достаточно того, чтобы имелось то же самое количество вершин, ребер и граней. А при изгибах, растяжениях и сжатиях поверхности это будет именно так.

Слушатель: А...

А.С.: Итак, если вы поверили, что не изменится ни количество вершин, ни количество ребер, ни количество граней, то всё остальное я докажу совершенно строго. Я продемонстрирую, что величина $В - Р + Г$ на шаре и на торе разная: на автомобильной камере она равна 0, на сфере — равна 2.

Слушатель: А если предположить, что дырка у тора имеет площадь ноль. По-прежнему число Эйлера — 0?

А.С.: А что значит «площадь дырки»? Это значит, что бублик сходится в одной точке — в серединке?

Слушатель: Да.

А.С.: Нет, эйлеров индекс $В-Р+Г$ будет другой. Фигура, которая получится, не устроена как обычная плоскость в окрестности любой своей точки, потому что в окрестности серединки, где дырка сходится с разных сторон, она устроена очень сложно.

Чтобы понять это, рассмотрим сечение тора (с заклеенной дырой) вертикальной плоскостью, проходящей в стороне от точки заклейки, а также плоскостью, проходящей через точку заклейки. Рассмотрим две замкнутые кривые, получившиеся в сечениях (см. рис. 31).

Первая кривая устроена как окружность, окрестность любой ее точки — просто интервал, а вторая кривая устроена иначе (рис. 32). Потому что в любой микроскоп окрестность точки пересечения видится как крест, а не как отрезок. То же самое с тором — с автомобильной камерой. С точки зрения таракана, который по ней ползает, это просто плоскость (если, конечно, дырка

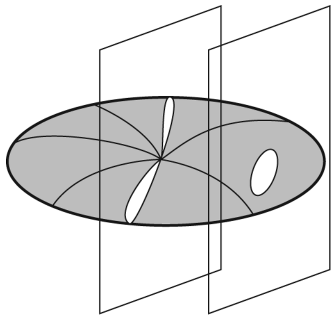

Рис. 31

в торе не была заклеена). Но и шар с точки зрения таракана — тоже плоскость (ведь он в каждый момент времени видит только маленький кусочек «у себя под носом», а он почти плоский). То есть смотрите, что происходит. Таракан, который ползает по тору и по шару, не может понять, что это разные объекты. Мы такие же тараканы, мы живем в трехмерном пространстве, мы — трехмерные тараканы. Мы знаем, что вокруг нас есть окрестность. Окрестность — это обычное трехмерное пространство: его определяют 3 взаимно перпендикулярных оси. То есть я вижу трехмерную окрестность вокруг себя, но я не знаю, как устроена вся вселенная целиком. Я не могу иметь такого представления. Так вот: топология приоткрыла эту тайну. Гипотеза Пуанкаре как раз про то, как устроено пространство, где мы живем. Мы видим, что вокруг нас всё трехмерно, но мы не знаем внутри какого рода объекта мы живем. То ли мы живем в обычном бесконечном трехмерном пространстве, то ли мы живем на поверхности трехмерной, извините, сферы, которая ограничивает четырехмерный шар. Не можем мы этого понять, просто посмотрев вокруг себя. Ведь радиус такой «трехмерной сферы» может равняться, скажем, 100 миллионам световых лет. А на такие расстояния глаз посмотреть не способен.

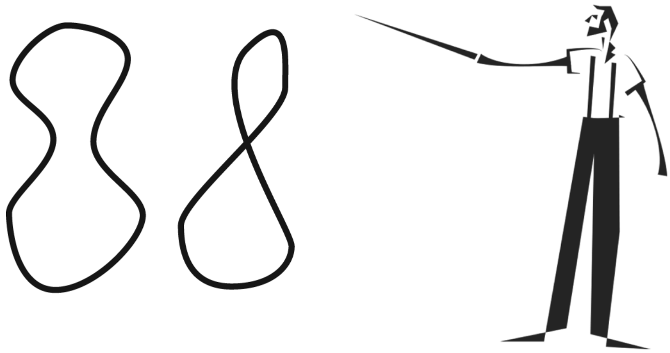

Рис. 32. Слева — простая замкнутая кривая (не пересекает сама себя). Справа — что-то вроде дороги с перекрестком. Топологический тип этих двух одномерных объектов разный.

Врезка 3. Еще одно упражнение для слушателей. Ниже описано странное путешествие неких космических Магелланов. Могло ли такое быть в космосе?

... Все астрономы Земли в 3333 году нашей эры были в глубоком недоумении. Один из них, направляя свой телескоп в разные точки небесной сферы, имел привычку фотографировать не только ее, но и (перейдя в другое полушарие Земли), фотографировать также диаметрально противоположную ей точку. Накопив изрядное количество таких пар фотографий, он принялся их изучать. И вдруг — сюрприз: на одной из двух фотографий пары он увидел маленькое, но вполне различимое созвездие в виде *правильного пятиугольника.* Велико же было его изумление, когда на другой фотографии пары он увидел ТАКОЕ ЖЕ созвездие, той же величины и той же яркости! Велико было и удивление всех остальных астрономов, когда они услышали это сообщение (и немедленно проверили его). И скоро об этом узнали все жители Земли. Было решено одновременно выслать две космических экспедиции (на предмет проверки, не посылают ли на Землю сигналы внеземные цивилизации): одна экспедиция — прямо в центр первого пятиугольника, вторая — в центр диаметрально противоположного пятиугольника.

Долго летели космонавты в ту и в другую сторону с одинаковой «субсветовой» скоростью — целых 10 лет. И всё это время за их ракетами наблюдали чуткие приборы астрономов. Вдруг в центре первого 5-угольного созвездия была зафиксирована яркая вспышка неправильной формы, и первая ракета ИСЧЕЗЛА. Астрономы решили взглянуть, видна ли вторая ракета. К своему ужасу, они увидели, что ровно в тот же момент с диаметрально противоположной стороны была зафиксирована вспышка ТОЙ ЖЕ ФОРМЫ, и вторая ракета тоже исчезла.

Могло ли такое быть?

ОТВЕТ. *Могло. Если бы только космос, в который погружена Земля, был не бесконечным трехмерным пространством, а очень большой, но конечной трехмерной сферой.*

Чтобы лучше понять это, представьте себе, что наша Земля сплошь покрыта мировым океаном, на котором имеется (на экваторе) только один небольшой остров вроде Крита. Поверхность этого океана является двумерной сферой, но свойства у нее похожи на свойства трехмерной сферы. И выплыли с этого острова два одинаковых корабля (в один и тот же момент времени): один поплыл ровно на запад, другой — ровно на восток. Плыли они быстро и потому очень сильно столкнулись (в точке, диаметрально противоположной острову Криту). От столкновения они могли взорваться. После отплытия прочие люди следили за ними, посылая вслед радиоволны (а они, как известно, могут огибать поверхность Земли). На экране радара и на западе, и на востоке всё время был виден какой-то странный правильный пятиугольник (оказалось, что это — радиомаяк из пяти источников, построенный кем-то на противоположной точке поверхности Земли). Корабли взорвались как раз в центре этого пятиугольника. Взрыв был зафиксирован одновременно и западным, и восточным радаром.

Сверху из нашего трехмерного мира мы видим, что тор и сфера — разные объекты. Но глазами червя, который ползает по двумерной поверхности, этого не видно, всё одинаковое. Вопрос: как же доказать червю, что поверхности разные?

Допустим, что у червя есть мышление, он может воспринять математическое рассуждение. Как я могу передать ему знание? А вот как. Я ему говорю: «Ты можешь, экспериментально исползав сферу, проверить, сколько здесь вершин?» Он говорит: «Ну, конечно могу. Я постепенно все их обползаю, поставлю метку, найду алгоритм, которым я посчитаю количество вершин». Тогда я спрошу: «Можешь ли ты посчитать количество ребер?» — «Ну, конечно, могу», — говорит он. «А граней?» — «Тоже могу. Нет проблем никаких. Каждый раз переходя из грани в грань, заливаю ее водой. В следующий раз я к ней приду, а она уже мокрая, значит, я ее уже посчитал». Понятно, что, находясь на двумерной поверхности, не выходя в трехмерное пространство, можно посчитать, сколько ребер, вершин и граней. Теперь, если я пересажу червя на тор, он посчитает вершины, грани и ребра и убедится, что индекс Эйлера имеет другое значение. На сфере — 2, а на торе — 0. Тут я ему и скажу: «Теперь ты понимаешь, что поверхности абсолютно разные, они с нашей человеческой трехмерной точки зрения абсолютно разные. Они с твоей точки зрения одинаковые, потому что ты видишь локально, а с нашей трехмерной — они разные». То же самое происходит с нашей трехмерной вселенной, с точки зрения четырехмерного пространства. Наше пространство может быть устроено по-разному, но Г. Перельман доказал теорему, которая ограничивает класс того, что нам нужно проверять, когда мы выясняем, где живем.

Слушатель: А как Эйлер пришел именно к этой формуле?

А.С.: Честно говоря, я не знаю, но он вообще был гений. Говорят, что у него никогда не было математических ошибок и неверных утверждений. Даже не совсем обоснованные рассуждения Эйлера (после их очевидной коррекции) были впоследствии подтверждены. Видимо, он настолько верно чувствовал ситуацию, как будто внутри него находился «барометр правильности», с которым он постоянно сверялся.

Математика — это прозрение. Вы идете по парку, вокруг листья шелестят, бах — и вы всё поняли. Это не от вас, это как бы сверху идет.

Сейчас я буду доказывать, что на сфере индекс Эйлера равен 2, а на торе он равен 0, и, может быть, вам будет ясно, как Эйлер к этому пришел.

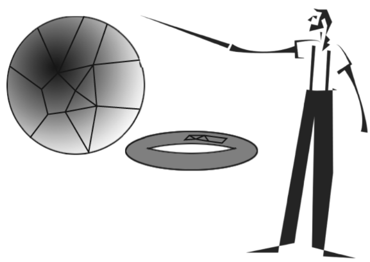

Рис. 33. Накидываем «сеть» из ребер и вершин на верхнюю половину сферы и на небольшой кусок поверхности тора. Нижняя часть сферы может трактоваться как одна гигантская грань (грани не обязательно должны быть треугольными). Оставшийся кусок тора НЕ МОЖЕТ считаться «гранью», так как грань не может выглядеть как трубка. Надо эту трубку подразбить на более мелкие части (на треугольники, квадратики и т. д.).

Допустим, я уже сформировал «сеть», покрывающую сферу, и «сеть» для тора (рис. 33).

Стираю одно ребро на сфере (потом буду стирать ребра и на торе). Что меняется вот в этом нашем выражении (то есть $\text{В} - \text{Р} + \text{Г}$)?

Слушатель: Минус одно ребро.

Слушатель: Минус одна грань.

А.С.: Значит, выражение $\text{В} - \text{Р} + \text{Г}$ не изменилось (рис. 34).

Какие еще операции я могу сделать с этой картинкой? Могу убрать еще одно ребро. Опять ничего не изменится. Но в какой-то

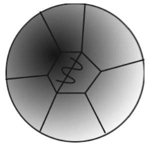

Рис. 34. Укрупняем «страны» за счет удаления участков границ. Начинать удаление можно с любого ребра.

момент меня ударят по рукам. Некоторые вершины могут стать странными (что-то вроде куска забора в чистом поле).

Может получиться «висячая вершина» — она связана с единственным ребром (может быть и несколько таких кусков, см. рис. 35).

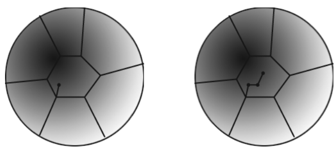

Рис. 35

Давайте превратим вот такое ребро во что-нибудь человеческое (только не в человеческое ребро!). Что для этого надо сделать?

Слушатель: Выпрямить.

А.С.: Да. Удалить вершину и выпрямить границу, убрав ненужный «кусок границы». Что изменилось?

Слушатель: Минус вершина.

Слушатель: Минус ребро.

А.С.: Минус ребро, потому что из двух соседних ребер стало одно. Заметьте, что в выражении $\text{В} - \text{Р} + \text{Г}$ опять ничего не изменилось. Итак, я буду упрощать картинку дальше (см. рис. 36).

Что происходит, когда я сниму еще ребро?

Пусть возникнет еще одна аномалия такого же типа. Возникнет вершина, из которой торчит ребро, и на другом конце ребра висит пустая вершина. Но по-прежнему $\text{В} - \text{Р} + \text{Г}$ такое же, как было раньше. Что я теперь могу сделать с этой вершиной и этим

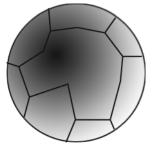

Рис. 36. Одна из стран явно стала «империей»!

ребром? Стереть их целиком. При этом количество и вершин, и ребер уменьшится на 1 (рис. 36). Значит, выражение опять не изменилось, а «сеть» на поверхности стала проще.

Я значительно увеличил грань, я убрал всё внутри нее, а выражение не менялось. «Сеть» свелась к двум граням, охватывающим сферу «сверху и снизу», разделенным замкнутой ломаной; в ней количество вершин равно количеству ребер, то есть $В - Р + Г = Г = 2$.

Для сферы формула Эйлера тем самым доказана.

Вопрос: «В какой ситуации логика этих рассуждений не может быть проведена?» Математик всегда изучает, в каком месте его рассуждение не пройдет. А не пройдет оно, например, на торе. На торе берем вершину и 2 ребра (рис. 37).

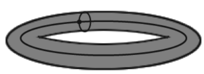

Рис. 37. Ребро вокруг бублика и ребро вокруг дырки от бублика (и одна вершина).

К такой картинке (рис. 37) приводится снимании ребер любая «сеть» (достаточно общего вида) на торе. Почему же нельзя снять еще одно ребро? Здесь я взываю к интуиции слушателей. Если мы разрежем тор по этим ребрам, а потом развернем, то получим квадрат. Чтобы лучше себе всё это представить, проделаем данные операции в обратном порядке: возьмем обычный квадрат из гибкой резины и изогнем его так, чтобы две противоположные стороны квадрата совпали (и затем склеим по совпавшим сторонам).

Получилась трубка (две оставшиеся стороны квадрата превратились при этом в два колечка). Изогнем трубку таким образом, чтобы эти колечки тоже совпали (и склеим их). Вот и получился из квадрата тор. По местам склеек восстанавливаем, где на этом торе расположены два ребра и одна вершина (из четырех вершин квадрата получилась ОДНА вершина на торе).

Осталось пояснить только один важный вопрос: так все-таки можно или нельзя при изучении топологии делать склейки, разрывы и надрезы? Выше говорилось, что при этом может измениться топологический тип объекта. Значит, если мы хотим сохранить топологический тип объекта, этого делать нельзя. Но можно безболезненно делать многое другое: растяжение, сжатие, перемещение, поворот объекта, увеличение его в несколько раз. Эти операции позволяют представить изучаемый объект в самом простом для понимания виде. Например, конус (заполненный внутри) можно превратить в шар.

Однако, если мы хотим *изменить* топологический тип, то можно (и даже нужно) делать разрезы и склейки. Эти операции так часто применяются в топологии, что даже носят специальное название: *«топологическая хирургия»*. Более того, практически любой интересный для изучения объект можно склеить из весьма простых кусков. Скажем, торическую поверхность можно получить склейкой нескольких треугольных кусков. А когда склейка будет закончена, места склеек будут определять некоторую «сеть» на торе. «Сеть», составленная из треугольников (естественно, криволинейных), называется *«триангуляцией»*. Простейшая «сеть» на торе (рис. 37) не является триангуляцией, так как она получена не из треугольников, а из квадратов... точнее, из одного-единственного квадрата. Но этой беде легко помочь: когда мы выше делали операции в обратном порядке, надо было на исходном квадрате нарисовать диагональ (то есть вместо квадрата далее рассматриваются «два склеенных треугольника»). После двух вышеописанных склеек из этого квадрата получится триангуляция тора. Она состоит (хотя в это и трудно поверить) из двух граней, трех ребер и одной вершины (к которой подходят все шесть концов этих трех ребер!).

Можно порекомендовать слушателям купить свежеиспеченный бублик с маком и, прежде чем его съесть, внимательно осмотреть и понять, как именно проходят по его поверхности ребра данной триангуляции. Но специалист-тополог может представить себе эту триангуляцию даже с закрытыми глазами!

Проверьте, возьмите любую ненужную велосипедную камеру, разрежьте и попытайтесь развернуть. Сохранится тот факт, что грань выглядит как квадрат или как круг, то есть она, как говорят математики, *топологически тривиальна.* Она выглядит почти как обычная плоская фигура. А вот если мы снимем ребро (т. е. сотрем его с поверхности тора) и потом разрежем по оставшемуся ребру, у нас возникнет *нетривиальная* фигура в виде кольца. (Кстати, слово «тривиальный» восходит к слову «тривиум», обозначающему начальный уровень образования в средневековых университетах.)

Колечко на плоскости (рис. 38) не является топологически тривиальным, у него внутри дырка. Получается, что нам запрещено убирать это ребро, потому что мы изменим тривиальный объект на нетривиальный. Математика прошла долгий путь, прежде чем смогла понять, чем формально квадрат отличается от кольца.

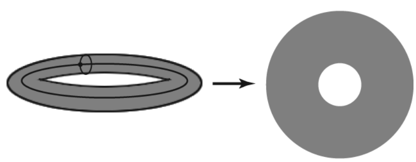

Рис. 38. Ребро, охватывающее «дырку от бублика», стерли. Вдоль оставшегося ребра разрезали. Полученную трубку разогнули. Сильно увеличив радиус одного из концов трубки и прижав ее к плоскости, получили из нее кольцо. (Можно стереть вместо этого другое ребро: убедитесь в том, что получится то же самое, даже наглядно проще!)

Но если мы примем к сведению этот путь, то сможем воспользоваться его результатами. Сможем сказать, что можно снимать ребро тогда и только тогда, когда объект, который возникает, будет топологически тривиален, то есть будет похож на квадрат по своей топологической структуре. Именно поэтому я не имею права стирать на торе ребро.

Итак, чему равно В−Р+Г для нашей картинки (рис. 38)? Сколько у нас вершин?

Слушатели: Одна.

А.С.: Граней?

Слушатель: 4?

А.С.: Нет, одна грань. Эта одна и та же грань. Посмотрите, из любой точки грани я могу пройти в любую другую, не пересекая рёбра. А это значит, что грань одна.

На торе сейчас всего одна грань, одна вершинка и два ребра. Поэтому $В - Р + Г = 0$.

И всегда для тора будет ноль.

А к чему я приду на сфере, когда сниму все возможные ребра и вершины? Какой объект получится? (То есть мы не хотим останавливаться на сети в виде двух граней, охватывающих сферу сверху и снизу, как выше, а хотим сделать ее еще проще.) Я утверждаю, что в итоге останется просто голая сфера с одной вершиной. Все ребра будут сняты.

Слушатель: И как получится два?

А.С.: Вот как. У вас одна вершина, одна грань и ноль ребер. $1 - 0 + 1 = 2$ (см. рис. 39).

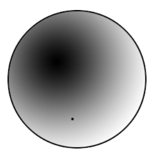

Рис. 39

Почему я не могу снять и точку тоже? Потому что, если я ее сниму, останется сфера, которая топологически не похожа на квадрат. А вот, если я сферу проколол... Что происходит с камерой мяча, который проткнули иголкой? Он сдувается и превращается (если сильно увеличить место прокола и наложить на плоскость) в лоскут — в плоскую фигуру. Сфера отличается от плоского куска только одной точкой. Очень хорошо это понимают грузины, буряты и тувинцы. Они делают большие пельмени (хинкали, позы и буузы).

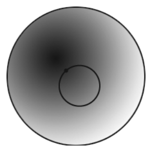

Рис. 40. Сфера зажата между двумя круглыми гранями (передняя, малая и задняя, большая). Их разделяет n-угольник (в нём, как было сказано выше, n ребер и n вершин). Странно только, что $n = 1$. Как это понимать, обсуждается в лекции.

Как их делают? Берут кусок теста, поднимают за края, слепляют, и получается сфера. Так что в топологии можно сказать, что сфера отличается от круга всего одной точечкой. Отсюда и возникает одна точка и ноль ребер.

Давайте к одной вершине добавим одно ребро (рис. 40). Что изменилось? Добавилось одно ребро и одна грань. То есть у нас одна вершина, одно ребро и две грани. Странно смотрится замкнутое ребро на рис. 40? Давайте тогда поставим еще одну вершину (рис. 41).

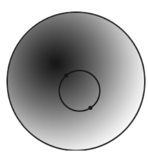

Рис. 41. Случай $n = 2$ (назовем это «два двуугольника»).

Итак: 2 вершины, 2 ребра, 2 грани: $2 - 2 + 2 = 2$.

Не бывает двугранников? Да еще образованных двумя «двуугольниками»? Хорошо. Чтоб не было сомнений, добавим еще две вершинки. Получится квадрат на сфере, то есть $n = 4$.

4 вершины, 4 ребра, 2 грани: $4 - 4 + 2 = 2$. *Упорно получается значение «2».*

Можно остановиться в любой момент, посчитать количество вершин, ребер и граней. Но вы должны понимать, что всегда можно привести к ситуации, в которой останется одна вершина. Поэтому у любой картинки на сфере эйлерова характеристика равна двум, ибо эту картинку можно свести к простейшему случаю «одна вершина, одна грань, ноль ребер».

Мы получаем противоречие. На торе всегда ноль, а на сфере — два. Но 2 не равно 0. Значит, это разные топологические фигуры, что, впрочем, каждый из вас и так знал. Но вопрос не в том, чтобы доказать очевидный факт, а в том, чтобы наработать язык, который поможет нам этот факт заметить в других пространствах. В частности, в пространстве большего числа измерений. А в большем числе измерений верно в точности то же самое, только появляется то, что называется «трехмерные грани». И получается следующее выражение:

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} - \text{Т}.$$

Здесь Т — количество трехмерных граней. Так выглядит эйлерова характеристика для четырехмерного пространства, в котором лежит трёхмерный объект. В общем случае у формулы тот же вид $\text{В} - \text{Р} + \text{Г} - \text{Т} + \ldots$ и так далее, в n-мерном пространстве, которое довольно сложно представить. Если изучить, что происходит при стирании вершины, ребра, грани, трехмерной грани, будет обнаруживаться, что значение нашего выражения не изменится. Вот основываясь на примерно таких вещах, но гораздо более сложных, была установлена справедливость гипотезы Пуанкаре.

В 2002 году, когда доказали гипотезу Пуанкаре, газета «Известия» напечатала о ней статью. Помнится, в СССР было 2 основных газеты: «Правда» и «Известия». И все знали, раз написано в газете «Известия», значит факт. Но в 2002 году «Известия» отступили от этого замечательного правила, написав математическую формулировку гипотезы Пуанкаре в таком виде, в котором она являла собой полную чушь. Они не удосужились позвонить ни одному грамотному математику и очень сильно опозорились (впрочем, мало перед кем).

А теперь — обещанное в первой лекции доказательство того, что в футбольном мяче ровно 12 пятиугольных лоскутков.

Рисуем на сфере картину футбольного мяча. Он должен состоять из шестиугольных и пятиугольных лоскутков. В любой вершине должны сходиться ровно 3 ребра. В остальном он может быть совершенно произвольным.

Давайте обозначим за x — число шестиугольников, за y — число пятиугольников.

Сколько тогда граней у нашего многогранника, нарисованного на сфере, то есть на футбольном мяче?

Слушатель: Граней?

А.С.: Да.

Слушатель: $x + y$.

А.С.: Правильно. Ровно столько, сколько в сумме количеств шести- и пятиугольников.

$$\Gamma = x + y$$

(Г — количество граней).

Чему равно количество вершин и чему равно количество ребер? Посчитаем наивно. Сколько вершин у шестиугольника?

Слушатели: 6.

А.С.: 6. Всего x шестиугольников. Значит, у всех шестиугольников вершин...

Слушатель: $6x$.

А.С.: А у пятиугольников?

Слушатель: $5y$.

А.С.: Значит, пишем $6x + 5y$, но это не совсем то, что надо.

Обозначим поэтому не «В», а «М»,

$$М = 6x + 5y.$$

А.С.: Почему это не то, что надо?

Слушатели: Потому что вершины совпадают.

А.С.: Если мы разрежем мяч на лоскутки или, наоборот, не начнем сшивать, то сколько будет вершин у всех лежащих на столе лоскутков? Именно столько, $6x + 5y$. А когда мы сошьем, некоторые вершины совпадут. Что надо сделать с этим числом, чтобы получить правильное число вершин?

Слушатель: Разделить на 3.

А.С.: Да. Правильно, потому что ровно — не больше не меньше, а ровно — 3 разных грани сходятся в каждой вершине:

$$В = \frac{М}{3} = \frac{6x + 5y}{3}.$$

Сколько ребер? Первый вопрос: сколько ребер до того, как мы сшивали? Столько же, сколько было до сшивания вершин:

$$М = 6x + 5y.$$

У любого многоугольника вершин и ребер одинаковое количество. А на что делить?

Слушатели: На 2:

$$Р = \frac{6x + 5y}{2}.$$

Каждое ребро мы считали ровно два раза.

Теперь мы воспользуемся формулой Эйлера. Формула Эйлера утверждает, что $В - Р + Г = 2$. Подставим в нее выражения через «x» и «y»:

$$\frac{6x + 5y}{3} - \frac{6x + 5y}{2} + x + y = 2.$$

Цель этой формулы — доказать, что $y = 12$. Давайте решать.

$$6x : 3 = 2x,$$

$$6x : 2 = 3x,$$
$$2x - 3x + x = 0.$$

Иксы ушли. Осталось уравнение относительно «y»:

$$\frac{5y}{3} - \frac{5y}{2} + y = 2.$$

Умножим все уравнение на 6, чтобы избавиться от знаменателя. Умножим и правую, и левую часть. Справа будет 12. Слева будет: $10y - 15y + 6y$. Отсюда

$$y = 12.$$

Чудеса, да? И никакого мошенничества!

Слушатель: Что-то тут есть от фокуса.

А.С.: Курс «Математика для гуманитариев» — это курс черной магии плюс ее разоблачение. В чем здесь фокус? Природа фокуса в том, что сократились все шестиугольники. Получается, они ни на что не влияют. Можно любое количество шестиугольников вклеить дополнительно в любой футбольный мяч, так как все x сокращаются*. А с «y» вы не можете сделать ничего, потому что сколько бы пятиугольников ни было у нас в запасе, их количество должно удовлетворять уравнению. А математики еще 3 тысячи лет назад научились решать линейные уравнения. У этих уравнений в нормальной ситуации всегда одно решение: $y = 12$ — единственное решение нашего уравнения. Поэтому сколько бы вас ни просили сшить футбольный мяч из 11 пятиугольников — не получится.

Слушатель: А если пятиугольников будет 24?

А.С.: Вы сошьете два футбольных мяча. Один не сошьется. Где-то будут торчащие, несшиваемые части.

Давайте теперь посмотрим на обычную бесконечную во все стороны плоскость. С одной стороны, это более простой объект, чем сфера, но, с другой стороны, она бесконечна во все стороны. *Бесконечность* — это такой краеугольный камень математики. И как с ней можно быть «на ты» — это очень важная тема. Кажется,

*Строго говоря, это утверждение требует доказательства.

плоскость, она и есть плоскость, посмотрел вокруг — везде плоскость. Но ведь она бесконечная... А как, кстати, можно понять, что земля не плоская?

В принципе, как я понимаю, то что древние люди считали Землю плоской — это сказки. Люди всегда знали, что она не плоская. Когда по морю идет корабль, сначала на горизонте появляются паруса. Как еще, кроме как искривлением, можно это объяснить?

Слушатель: Может быть, Земля не ровная именно в этом месте...

А.С.: От того, что ты видишь паруса, до понимания, что Земля может быть устроена как шар, уже, в общем, недалеко.

Люди, на самом деле, в прошлом совершали и более великие открытия. Знаете, когда в первый раз (по крайней мере, документально) была высказана идея о конечности скорости света? В 1676 году датский астроном Тихо Браге стал наблюдать затмения спутников Юпитера. И заметил странности в их периодичности: то затмения наступали позже прогнозируемого момента, то раньше. Тогда он предложил совершенно невероятное объяснение. Он предположил, что такое могло бы быть, если бы скорость света была конечна. Так как Земля и Юпитер то приближаются друг к другу, то отдаляются, мы видим объект, который ближе, раньше, чем тот, который находится дальше. За счет этого и возникает неполная периодичность в затмениях. Но тогда нужно было признать, что значение этой скорости настолько велико, что оно превосходит всякое наше воображение. И Браге оценил его как 225 тысяч километров в секунду. Он назвал величину, которая равна 75% от верного значения. Но тогда ученый мир был еще не готов к таким смелым идеям, и к этому предположению отнеслись с большим сомнением.

Или другая история.

У вас в сумке, наверное, живет зарядка от телефона или наушники. В каком они будут состоянии? Обычно получается страшный запутанный провод.

Вопрос: можно ли его как-то распутать, если вы еще и концы провода свяжете, чтобы он стал замкнутым, как окружность? Чтобы он стал после этого распутывания нормальной, идеальной окружностью?

Слушатель: Нельзя.

А.С.: Иногда можно, иногда нельзя. Это — задача из теории узлов. Какие-то виды узлов можно распутать, какие-то нельзя. Сейчас я расскажу историю, которая может оказаться неправдой. Я слышал ее на лекции примерно 13 лет назад. Знаменитая проблема узлов, топологических типов узлов, встала в первый раз на корабле пирата Дрейка в конце XVI века. Один из матросов этого корабля тоже занимался узлами. Он завязывал много разных морских узлов и заметил, что некоторые из них — по сути один и тот же узел. Надо просто в одном месте потянуть, в другом приспустить шнур, и из первого узла получится второй (имеется в виду, что при этом концы узла должны оставаться связанными). Такие узлы называются «эквивалентными». И пирату в голову пришла идея классифицировать все виды узлов. Какие друг в друга переводятся без разрезания, а какие нет. Ему это не удалось, в чем, якобы, он честно признался.

Прошло 400 лет. И только совсем недавно был сделан большой прорыв в решении задачи об узлах. Сделали его отечественные математики Максим Концевич, Виктор Васильев и Михаил Гусаров.

Идея решения в том, что берут два узла, пишут для них некоторые математические выражения, и если они разные, то и узлы тоже разные.

Вернемся к плоскости. «Простой» вопрос: какими многоугольниками можно замостить плоскость?

Что значит «замостить многоугольниками»? Я имею в виду следующее. Вы заходите в магазин и выбираете себе паркет. Понравившийся вам паркет состоит из одинаковых дощечек такой формы (рис. 42):

Кто-то в страшном сне придумал такую форму. И таких дощечек у вас немыслимое количество. Вопрос: «Можно ли собрать

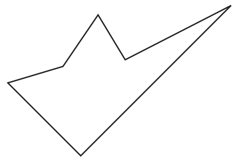

Рис. 42. Замысловатая паркетная плитка.

из них паркет? Или они при сборке входят в противоречие сами с собой?»

Слушатель: Ну, скорее всего, центр еще получится, а вот по краям комнаты будут проблемы.

А.С.: Вы, наверное, уже видите, что не всякими плитками можно замостить плоскость.

Но доказать, что какой-то конкретной плиткой нельзя замостить — довольно сложная задача. На самом деле, до сих пор не классифицированы даже все виды пятиугольников, которыми можно замостить плоскость. Найдено несколько пятиугольников, которыми можно замостить плоскость, но неизвестно, есть ли другие. Открытая проблема*. Но тем не менее методами Леонарда Эйлера можно доказать следующую теорему.

Теорема. Не существует ни одного выпуклого 7-угольника, которым можно замостить плоскость. Более того, восьми-, девяти-, десяти- и т. д. угольника тоже не существует.

А что такое «выпуклый»? Выпуклая фигура — это такая фигура, у которой, если вы выбрали любые две ее точки, то весь отрезок между ними лежит внутри этой фигуры, не выходит за ее пределы.

*Уже после чтения этих лекций, в 2015 году, был изобретен новый вид выпуклого пятиугольника, годный для замощения плоскости!

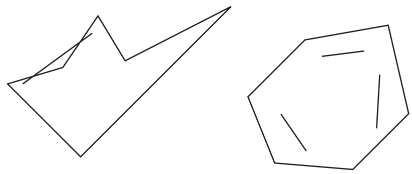

Рис. 43. Слева — невыпуклая фигура, справа — выпуклая.

Выпуклость — одно из фундаментальных понятий математики. Такое простое определение, а на нём построена огромная сложнейшая теория с зубодробительными теоремами.

Почему же теорема требует выпуклости? Представьте себе царскую корону (рис. 44). Паркетина такой формы хотя и является 7-угольником, но он не выпуклый. Ниже мы увидим, что такими паркетинами МОЖНО замостить плоскость. Значит, если не требовать выпуклости, доказать указанную выше теорему нельзя — она просто неверна. Нельзя огульно утверждать, что паркетов из 7-угольников не бывает. Не бывает только из выпуклых.

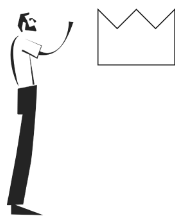

Рис. 44. До царской короны страшно даже пальцем дотронуться!

Сколько углов? Семь. Однако такой плиткой можно без проблем замостить плоскость.

Переворачиваем фигурку и вставляем корону в корону, а потом еще раз, два... (см. рис. 45).

Слушатель: А в конце как?

А.С.: До бесконечности. Мы же говорим о бесконечной плоскости. Полосу сделать у нас получилось... (бесконечную в обе стороны). Ну, а если можно полосу, то мы ее размножаем неогра-

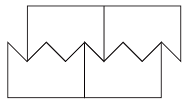

Рис. 45. ... и получилась страшная зубастая пасть! Продолжаем ее до бесконечности вправо и влево.

ниченно вниз и вверх, и всё. Мы «запаркетили» всю плоскость. А теперь я нарисую выпуклый семиугольник (рис. 46).

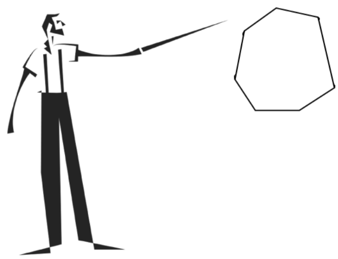

Рис. 46. А вот этими нельзя замостить плоскость!

Априори совершенно не понятно, почему им нельзя замостить плоскость? Почему это так? Почему никакого семиугольника нельзя предложить в качестве дощечки для паркета? Если Ваша невеста просит Вас: «Милый, я так хочу выпуклый семиугольный паркет в нашу ванну!», — то это вариант «вежливого посыла» — ибо такого быть не может. Сейчас мы докажем эту теорему. И в этом доказательстве у нас в первый раз возникнет бесконечность «во весь рост». Как доказываются теоремы не существования чего-то? Какой прием доказательства таких теорем?..

Слушатель: От противного?

А.С.: Точно. Предположим, что существует выпуклый семиугольник, которым можно замостить плоскость. Не знаю какой, но какой-то есть. Предположим и приведем это предположение к противоречию. Итак, посмотрим на плоскость, которая замощена этими семиугольниками. Посмотрим на нее в «перевернутый бинокль» и увидим часть плоскости, как будто очень большую квартиру (см. рис. 47).

Я предупреждаю, такими доказательствами гоняют на ночь чертей. Приготовьтесь.

Начнем с того, что попробуем посчитать, сколько в квартире многоугольников. Давайте исходить из того, что наш семиугольник имеет длину 1 метр, а размер квартиры — примерно 1 км.

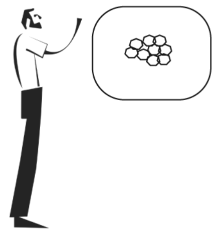

Рис. 47. «Чертогон» в самом разгаре. Для справок можно почитать рассказ Н. С. Лескова с таким же названием.

На самом деле, не важно, какого что размера. Важно, чтобы вторая величина была *неизмеримо больше*, чем первая.

В данном случае «длина» семиугольника в 1000 раз меньше «длины» квартиры.

Слушатель: Что мы считаем длиной 7-угольника или квартиры?

А.С.: Например, самую большую диагональ. Это не очень важно. Тут математика немножко напоминает физику. Нужно несущественные детали не замечать, а на существенные — обращать внимание. Когда у физика есть ниточка, она обычно имеет толщину ноль. На самом деле у нее, конечно, есть толщина, но физикам она не важна. Вот и нам не важно. Возьмем какое-то измерение семиугольника (например, любую из его сторон или любую диагональ). Ведь все эти измерения НАМНОГО МЕНЬШЕ, чем «длина квартиры» — что бы мы ни понимали под этой длиной. На полу квартиры в нормальной ситуации помещается очень много паркетин. Форма пола квартиры тоже неважна, поэтому будем считать его кругом радиуса R (где R может быть как угодно велико).

Не забывайте, что нам приказано замостить не пол в квартире, а всю бесконечную плоскость.

А теперь давайте посмотрим, сколько примерно семиугольников таится внутри вот этого огромного круга? С точностью до порядка? Если у нас диаметр круга в тысячу раз больше, чем диагональ семиугольника, сколько семиугольников примерно поместится в круг?

Слушатель: Миллион?

А.С.: Миллион, правильно. *Правильный физический ответ.* Миллион. Не важно, что это будет 700 000 или 5 миллионов. В районе миллиона. Порядок величины такой. Это примерно миллион.

Слушатель: Почему миллион?

А.С.: Потому что у многоугольника размером 1 метр площадь сопоставима с 1 м^2 — может быть, чуть меньше, чуть больше. У круга, у которого диаметр 1 километр, площадь порядка 1000000 м^2. Значит, в круг влезает примерно миллион семиугольников.

Зададим теперь следующий вопрос. Сколько примерно семиугольников «живет» в районе границы этого круга (то есть зацепляет за границу круга)?

Слушатель: 6000.

А.С.: Да, похоже. $2\pi r = 6000$. Порядок этого числа — не миллион, а тысяча. То есть внутрь входит в районе миллиона семиугольников, а на границе их несколько тысяч. А теперь — внимание! Я стираю все многоугольники, которые не лежат в этом круге. Затем беру плоскость и, как грузинский хинкали, сжимаю ее в сферу (рис. 48).

Делаю я это, чтобы воспользоваться формулой Эйлера:

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2.$$

Грубо говоря, вместо круга есть поверхность огромного шара, у которого верхняя шапочка (почти плоская) вся испещрена семиугольниками. Но для картинки на всей большой сфере верна фор-

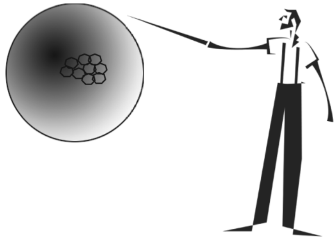

Рис. 48. Профессор сжал всю плоскость в сферу, и черти разбежались!

мула Эйлера:

$$\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2.$$

Давайте оценим примерно, сколько у этой картинки будет вершин, ребер и граней? Одна огромная грань снизу, а наверху порядка миллиона граней в виде паркетин. Понятно, что одна грань погоды не делает. Более того, так как мы сейчас будем иметь дело с величинами порядка миллиона, то 2 в формуле Эйлера, или 0 — тоже совершенно неважно. Я могу написать «примерно равно нулю». $\text{В} - \text{Р} + \Gamma$ примерно равно 0. Или $\text{В} + \Gamma \approx \text{Р}$. Граней — порядка миллиона. $\Gamma \approx 1000000$.

Сколько вершин? 7000000 — это вершин у всех многоугольников; и в каждой из вершин сходится как минимум 3 многоугольника. Может быть и больше (например, если у нашего 7-угольника есть острый угол в 30 градусов, и в вершине сошлись 12 этих острых углов), *но не меньше* — это точно (ровно два угла не могут со всех сторон окружить вершину, ибо каждый из них меньше 180 градусов). Поэтому вершин «не больше» (меньше или равно), чем 7000000/3. На самом деле я не учел вершины, которые являются вершинами большой нижней грани. Сколько их примерно?

Слушатель: 6000.

А.С.: Да. Поэтому надо прибавить еще 6000. Нам не жалко!

$$7000000/3 + 6000.$$

Но шутка матанализа заключается в том, что 7000000 и 6000 — не сопоставимы по величине, так как первая величина значительно больше; так что про тысячи можно забыть. Получается:

$$\text{В} \leqslant 7000000/3.$$

Теперь о ребрах. Ребер будет 7000000/2. Причем делим *в точности* на 2, без всяких меньше или равно, потому что каждое ребро мы посчитали ровно 2 раза:

$$\text{Р} = 7000000/2.$$

Слушатель: А почему мы каждое ребро посчитали ровно 2 раза?

А.С.: Потому что мы плиточку к плиточке прикладываем, без всяких зазоров (мы ведь предположили, что *можно* уложить без зазоров), см. рис. 49.

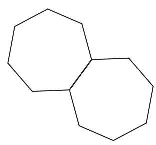

Рис. 49. Плиточка к плиточке! Ребро к ребру! Без зазоров!

Слушатель: Почему в теореме взято 7 сторон и более?

А.С.: Потому что шестиугольное замощение давно известно, например, его знают наши друзья пчелы. Пятиугольное может быть таким: поставил домики рядом и сверху такие же, но вверх ногами (см. рис. 50). Домики, в отличие от царской короны, которую мы в самом начале рисовали, выпуклые.

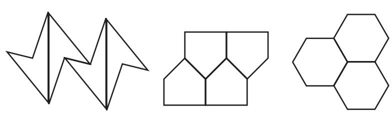

Рис. 50. Замощение плоскости 4-угольниками, а также некоторыми 5-угольниками и 6-угольниками возможно.

А уж квадратами, треугольниками замостить — это совсем легко. Любым четырехугольником можно замостить плоскость и любым треугольником — тоже. А вот какими пятиугольниками можно — это сложная задача. И про выпуклые шестиугольники тоже далеко не всё известно. Но какими-то можно. А вот выпуклыми семиугольниками уже никак нельзя.

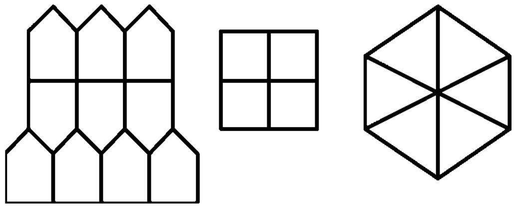

Рис. 51. Паркеты из «домиков», квадратов и правильных треугольников. В первом из них к вершинам подходят либо 3, либо 4 ребра. Во втором — только 4 ребра. В третьем — только 6 ребер.

Давайте все-таки доведем до конца доказательство.

У нас есть равенство

$$\text{В} + \text{Г} \approx \text{Р}.$$

Оно говорит нам, что количество ребер должно быть того же самого порядка, что и количество вершин плюс количество граней. Подставим наши значения.

$$\frac{7000000}{2} \approx 1000000 + \frac{7000000}{3}.$$

Если посчитать, сократив на миллион и умножив на 6, равенства не получается. Очень заметно не получается! Потому, что 21 не равно 20. Так что никакая добавка слагаемого типа 6000 дела не спасет, ибо эту добавку тоже придется делить на 1000000, и она станет исчезающе малой. А ведь мы могли взять не $R = 1000$ км, а $R = 20000$ км. Тогда бы процентное влияние добавки типа «6000» стало бы гораздо меньше. То же самое, естественно, будет с восьми-, девяти- и прочими «много-много-угольниками». А вот для шестиугольников как раз получается

$$6000000/2 = 6000000/3 + 1000000$$
$$3000000 = 2000000 + 1000000 \quad \text{(при любом значении } R\text{)}.$$

Точное равенство получается потому, что шестиугольное замощение устроено так, что в каждой вершине сходится ровно 3 ребра. А вот уже 5-угольное замощение устроено иначе. Иногда 3 ребра сходится, а иногда — 4. У квадрата везде сходятся 4, а у правильных треугольников — 6 ребер (рис. 51).

То есть выпуклое замощение бывает треугольное, четырехугольное, пятиугольное, шестиугольное. А никаких других не бывает.

Слушатель: А какая практическая польза?

А.С.: Ну, наверное, есть какая-то. Математик никогда не думает о практической пользе. Другие за него думают. Посмотрит какой-нибудь строитель: «О, значит не надо даже думать о том, чтобы использовать семиугольные плитки». А для математика нет такого вопроса. Это же совершенство. Это всё равно, что спрашивать, какая практическая польза у молитвы. Так же и математик, он просто показывает: нельзя, — ура, вот какая интересная теорема. А польза? Наверняка какая-то польза есть. У любого красивого факта есть польза.

Врезка 4. Ни один из слушателей не спросил у меня: «А где же в доказательстве теоремы используется тот факт, что исходный семиугольник был выпуклым?» И даже сложилось превратное впечатление, что для проведения доказательства выпуклость 7-угольника вообще не нужна. Но она нужна! Ведь иначе получилось бы, что мы заодно доказали, что для невыпуклого семиугольника тоже нельзя придумать замощение плоскости таким кусочком. Выше, однако, приведен пример, что 7-угольным кусочком типа «царская корона» вполне можно замостить плоскость.

На самом деле выпуклость была незаметным образом использована, когда мы поделили число 7000000 именно на 3. Только для выпуклого 7-угольника можно опираться на число 3. На рис. 45 паркет содержит такие вершины, где сходятся только две плитки паркета (и на одной из них имеется угол БОЛЕЕ 180 градусов). Подобное явление, однако, возможно только для невыпуклых плиток: любой выпуклый многоугольник содержит в себе только углы менее 180 градусов.

А.С.: Скажу напоследок вот что. Если кого-то не убедят тысячи и миллионы, надо будет сказать следующее. Если круг в n раз больше по размеру, чем плиточка, то количество граней, вершин и ребер имеет порядок n^2, потому что их количество связано с площадью круга. А то, что в районе большой окружности «живет», имеет порядок n, потому что вопрос связан с длиной окружности. И если вы исследуете некоторое выражение порядка n^2, например, $\frac{7n^2}{2} > \frac{7n^2}{3} + n^2$, и при этом во все слагаемые примешивается мелочь порядка n: $2n$, $3n$, $6n$ и так далее, то матанализ разрешает ее стереть, потому что n^2 и n «разного порядка роста». И неравенство будет верным при любом n, начиная с некоторого места. (А именно с того места, когда n^2 станет подавляюще большим по сравнению с n.)

В матанализе есть основной принцип: если вы про какое-то число показали, что оно меньше сколь угодно малого положительного числа, то вы доказали, что оно равно нулю (если оно изначально не было отрицательным). Вот вы получили какое-то число, вы хотите доказать, что оно равно нулю. Покажу типичный прием матанализа. Пусть есть число a. Рассмотрим такое число, как $\frac{1}{n}$, и покажем, что наше число меньше, чем $\frac{1}{n}$. Допустим, это мы доказали для любого натурального значения n. Для 1000, для 1000000, для 1000000000... Если вы умеете доказать такое неравенство для любого n, значит, вы умеете доказать, что a равно нулю.

Вот в этом, собственно, весь принцип матанализа и заключен. Всё остальное, что есть в матанализе: интегралы, производные — не более чем упражнения с этой логикой (математики говорят в этом случае: «Применим технику работы с порядками бесконечно малых»).

И самый последний пример. Мне рассказал его папа, когда я еще даже в школу не ходил. Папа взял яблоко, отрезал от него половинку и говорит: «Это сколько от яблока?» — «1/2», — сказал я. — «А если теперь я к этой половинке прибавлю половинку оставшейся половинки, то это что здесь надо написать?»

Слушатель: $1/2 + 1/4$.

А.С.: А если я проделаю это бесконечное количество раз? Тогда что я получу?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1.$$

Слушатель: Ноль.

Другой слушатель: Единицу.

А.С.: Я получу число один, причем *в точности* число 1.

Почему в точности? Потому что каждый раз число получалось не больше единицы, это очевидно. Значит, мы не можем получить число больше единицы. Но какое бы маленькое число мы не взяли, в конце концов $\frac{1}{n}$ станет меньше его. На самом деле у нас в знаменателе вместо n стоят степени двойки: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192…

Они очень быстро растут, поэтому $\frac{1}{2^n}$ — очень быстро уменьшается. И в итоге очередное расстояние до числа «1» станет меньше любого наперед заданного числа. То есть они уходят в ноль. Получается, что наша сумма неограниченно приближается к единице, и вот тогда математик говорит: «Следовательно, она равна единице». Всё. Вот он, *предельный переход*. Это то, что учат в матанализе на любом факультете любого вуза. Больше ничего в нём нет*.

*В этом месте, на самом деле, заключается (прячется) значительная психологическая трудность. Она разрешается посредством аксиомы Архимеда.

Слушатель: А если здесь просто включить житейскую мудрость и подумать, что мы отрезали от одного целого яблока?

А.С.: Да. В данном случае можно. Но житейская мудрость — она такая штука, что она иногда не работает. Давайте решим такую задачу.

Кузнечик сначала прыгает на один метр, а потом на $\frac{1}{2}$ метра, а потом — на $\frac{1}{3}$, а потом — на $\frac{1}{4}$, а потом — на $\frac{1}{5}$, и так далее… Вот он прыгает и прыгает. Есть ли предел того, куда он может допрыгать?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

Слушатель: Да.

А.С.: При наивном подходе кажется, что есть, потому что «шажки все меньше и меньше». Но тем не менее, друзья мои, вы будете смеяться, или удивляться, или поражаться, или возмущаться, но

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots = +\infty$$

(т. е. эта сумма равна бесконечности).

Нет никакого предела тому, куда может дойти этот кузнечик. Никакого. Он может дойти до Луны, может дойти до Солнца, и далее, прямо в Космос!

В прошлом примере у нас шажки были всё меньше и меньше, они стремились к нулю, но в сумме получилось число, равное единице. А эти шажки, хотя и тоже всё меньше и меньше, но уйти этими шажками можно до бесконечности, вот такая загадка природы. Хотите, покажу, почему?

Слушатели: Да.

А.С.: Вот смотрите, сейчас я с кузнечиком сделаю страшную штуку, я сейчас его заменю на кузнечика, который шагает еще медленнее. А именно: кузнечик этот будет шагать следующим образом.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4},$$

то есть вместо одной трети, он шагает на одну четверть. Не правда ли, такой кузнечик будет отставать от первого?

Слушатель: Да.

А.С.: А теперь вместо одной пятой я сразу одну восьмую поставлю. То есть первый кузнечик на одну пятую шагает, а мой, второй — он сразу прямо раз — и «скис» — только на одну восьмую. И так 4 раза по одной восьмой:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}.$$

А вместо одной девятой я напишу что?

Слушатели: Одну шестнадцатую?

А.С.: Правильно. Одну шестнадцатую, и так повторим эту добавку 8 раз. А дальше я что напишу? Вместо одной семнадцатой?

Слушатель: Одна тридцать вторая.

А.С.: Одну тридцать вторую. Отлично. И повторим ее 16 раз!

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \\ + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$$

Похоже, что второй кузнечик всё время отстает от первого. Небось, он совсем отстанет от него: ведь первый, как мы утверждаем, ускачет на бесконечное расстояние. Нет, самое страшное здесь вот что. Хоть второй и отстает, но он ТОЖЕ ускачет на бесконечное расстояние. Чему равна сумма $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ (двух равных слагаемых)?

Слушатель: $\frac{1}{2}$.

А.С.: Отлично. А такая:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}?$$

Слушатель: Одна вторая.

А.С.: Тоже одна вторая! А для шестнадцатых долей?

Слушатель: Тоже одна вторая.

А.С.: Теперь вы поняли, почему он дойдет до бесконечности?

Слушатель: Нет.

А.С.: Потому что мы каждый раз, в каждой очередной группе шагов, будем получать в сумме $\frac{1}{2}$. Значит, он всё снова и снова отходит на 0,5. А таких *«одних вторых»*-то бесконечное количество штук. Вот он и уйдет на бесконечность.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2},$$

и так далее. Значит, на бесконечность тем более ускачет и первый кузнечик!

Но самое неожиданное я приберег на конец. (*Берёт в руки мяч и держит его над полом.*) Уроним этот мяч и послушаем, сколько раз он ударится.

Слушатель: Бесконечность.

А.С.: Правильно. Бесконечность, но она будет «преодолена» за конечный промежуток времени. Законы физики это подтвердят. Единственное, что, к сожалению, в атомных размерах законы физики меняются (надо применять квантовую механику), и эта идиллия прекращается. Но если бы ньютоновская механика была верна до самого конца, то любой мяч, если его отпускают, за конечное время делал бы бесконечное число подскоков. То есть он устроен, как задача с яблоком. Потому что каждый следующий подскок, по законам физики, составляет по высоте некоторый процент от предыдущего. Но процент от любой положительной величины — это положительная величина. Поэтому каждый следующий подскок — это тоже положительная величина, а значит, их будет бесконечное количество. Но они суммируются по времени. Время подскоков суммируется, а сумма стремится к некоторому числу. Временные промежутки будут всё короче и короче и, грубо говоря, за 2 секунды мяч уже бесконечное число раз подпрыгнет и ляжет на землю тихо. За конечное время бесконечное количество прыжков...

До встречи на лекции 3!

Лекция 3

А.С.: В прошлый раз я успел поговорить про бесконечность. Умение работать с бесконечностью, умение через бесконечность перешагивать, умение различать разные бесконечности — это основная работа в математике. Как могут быть разные бесконечности? Кажется, что либо что-то конечное, либо бесконечное. Но нет. На самом деле бесконечности бывают разные. На прошлой лекции мы говорили про сходящиеся и расходящиеся ряды. То есть рассматривали суммы с бесконечным количеством слагаемых.

Например, сумма $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots$, как выяснилось, стремится к бесконечности. То есть становится больше любого наперёд заданного числа. Скажите ей: «Будь больше 1000». Тогда нужно взять много слагаемых.

Возьмем 2^{2000} членов. Оказывается, тогда их сумма будет больше 1000. Скажете: «Будь больше 1000000». Тогда нужно взять $2^{2000000}$ членов. Их сумма будет больше миллиона. И так далее.

А вот этот ряд: $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots$ тоже состоит из бесконечного числа членов, но его сумма никогда не станет больше, чем двойка.

Теперь еще одна интересная задача. Начнем издалека. В 2000 году, где-то зимой, мы были в лесу в районе станции Радищево, праздновали чей-то день рождения. Вокруг было очень мало сухих деревьев, все спилили до нас. Было только огромное, совершенно сухое дерево. И это дерево огромного размера стояло и очень нас заманивало. У нас была двуручная пила, и мы начали пилить. Пилили-пилили, пилили-пилили и допилили. Дерево сделало «тцук...» и село на нашу пилу. Пила осталась внутри, а полностью спиленное дерево стоит и падать не собирается (рис. 52).

Но стоит подуть ветру, и оно упадет. В какую сторону оно упадет — совершенно не предсказуемо. Что делать? Надо или вставать и уходить, написав со всех сторон «внимание, внимание, до ближайшего ветра сюда не подходить», или пытаться уронить дерево. Мы решили с ним побороться. Взяли вспомогательное де-

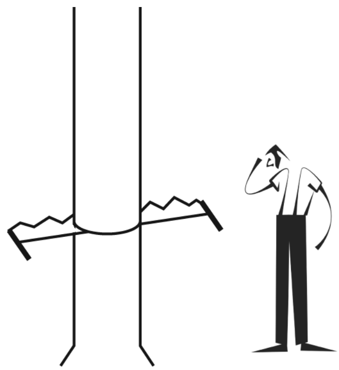

Рис. 52. Пальцем слегка толкнем это дерево...

рево и прислонили его к спиленному где-то на высоте десяти метров. Навалились, и оно поддалось (рис. 53).

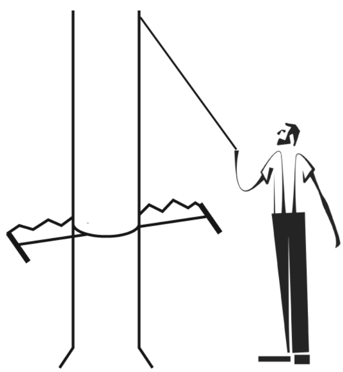

Рис. 53. Дерево с контрфорсом.

Было видно, как дерево начало падать. Но скорость была чудовищно медленная: несколько сантиметров в секунду, едва-едва. Где-то минуту мы ждали, пока оно медленно наклонялось, и только потом оно начало ускоряться и через несколько мгновений рухнуло со страшным грохотом. Пришел я домой и написал уравнение падения дерева. В физике траекторию движения системы под действием сил можно выписать в виде уравнений. Такие уравнения называются *дифференциальными.* Это означает, что скорость изменения скорости, то есть то, что называется ускорением, зависит от сил, которые действуют на тело. Это — один из основных законов физики, он позволяет свести всё, что есть в обычной, не квантовой, механике, к системам уравнений. Можно выписать такое уравнение и для нашего дерева. И к своему удовольствию, исследовав это уравнение, я пришел к выводу, что, если дать дереву толчок очень маленькой силы, оно начинает падать очень, очень, очень медленно.

Я начинаю рассуждать, что дерево — это просто вертикальная палка, без толщины. Она стоит совершенно вертикально, но обладает массой. Массивная вертикальная палка. Кто-то толкает ее сверху. Ударит человек — палка падает (скажем) 1 минуту. Пролетит голубь, заденет — будет падать 10 минут. Начальная скорость верхней точки будет, скажем, 1 мм/с. И очень долго скорость почти не будет меняться. А если врежется муха, то палка будет падать час. Уравнение выдает удивительный результат: на самом деле нет никакой границы на время падения дерева, вообще никакой.

Рассмотрим похожую задачу. Есть вагончик, в котором на шарнире установлена тонкая железная вертикальная палка. Чуть-чуть вправо или влево — она падает, так же, как и рассмотренное выше дерево.

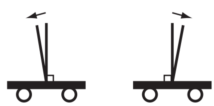

Рис. 54. Падающее дерево едет в вагоне...

Теперь представьте обратную задачу. Вы берете уже упавшую или под некоторым углом висящую палку. После чего придаете ей некоторый импульс — толкаете ее снизу вверх (рис. 55).

Какие возможны варианты? Во-первых, толчок может быть слишком слабый. Что произойдет с палкой? Поднялась и упала обратно. Теперь, допустим, подошел какой-нибудь бугай. Бабах

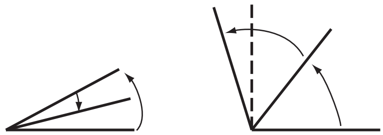

Рис. 55. Слева — слабый удар по стержню (он упадет обратно). Справа — сильный удар (стержень упадет с другой стороны от точки прикрепления).

по этой палке. Она р-раз — и перелетела на другую сторону. Подходит кто-то немножко более сильный, чем я, но слабее, чем бугай. Толкает палку, а она всё равно падает.

Вы качались на качелях-перевертышах? Мое детство отчасти проходило в городе Мценске. И в парке там была такая закрывающаяся изнутри кабинка с противовесом наверху, которую раскачиваешь, раскачиваешь, раскачиваешь, и она «переворачивается»: противовес оказывается внизу, а кабинка сверху (но благодаря свободному подвесу кабинка при этом вверх ногами не переворачивается). Я замечал, что наверху она долго движется с более-менее постоянной скоростью. Мы знаем, что с постоянной скоростью движутся тела, на которые не действуют силы. На кабинку силы, конечно, действуют, но вертикально вниз. В момент, когда кабинка проезжает верхушку, сила перпендикулярна линии движения, поэтому скорость почти не меняется. И если аккуратно выверить движение, то кабинка практически остановится наверху.

Вернемся к нашей палке и нарисуем график. По горизонтальной оси — сила удара, по вертикальной — результат (рис. 56).

Если вы ударили слишком слабо, то результат будет — палка упадет обратно. Если очень сильно ударить, то результат — палка перевернется на другую сторону. И есть ровно одно вещественное число, одна сила удара, которую нужно придать палке, чтобы она остановилась вертикально. Вопрос. Сколько нужно времени в идеальном мире, в котором нет воздуха, трения и так далее, чтобы палка заняла вертикальное положение?

Слушатель: Смотря под каким углом было изначально.

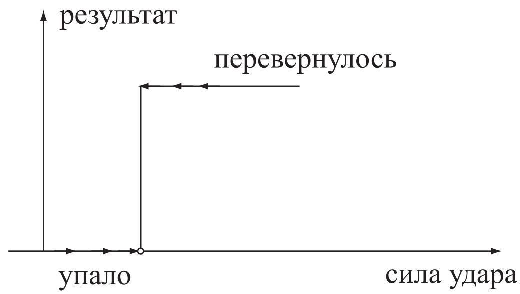

Рис. 56. Построение графика ступенчатого вида («отклик на удар»).

А.С.: Нет. От того, под каким углом была изначально палка, зависит только то, с какой силой нам надо толкнуть палку. А времени понадобится бесконечный промежуток. Строгая математическая бесконечность. То есть, если палке придать такую силу, которая в точности достаточна для того, чтобы она достигла положения вертикального равновесия, то время, за которое палка будет достигать этого положения, равно плюс бесконечности. В условиях задачи, когда мы говорим об идеальной математике, мы, естественно, не учитываем, что вокруг меняются обстоятельства. В идеальной ситуации время равно бесконечности. Я посчитал всё это в 2000 году, потом рассказал физикам, а они сказали, что это очевидно, и всё они это давно знали. Наверное, кому-нибудь не хочется верить, что потребуется бесконечное количество времени. Я дам еще одно подтверждение. Давайте вернемся к тележке. Пусть это будет вагон, внутри которого находится наша палка на шарнире. Вагон едет по маршруту Москва — Петербург. И мне сообщили, с точностью до 100% (так, как у математиков бывает, а в жизни нет) информацию о скорости, с которой вагон будет двигаться (рис. 57).

Утверждение. Существует такое положение палки, такой угол, в котором я могу ее выпустить из рук в начальный момент времени, что она не упадет в течение всей дороги. Существует такой угол альфа, что, если я придам железке на шарнире этот угол, то она всю дорогу будет болтаться туда-сюда, но никогда не упадет.

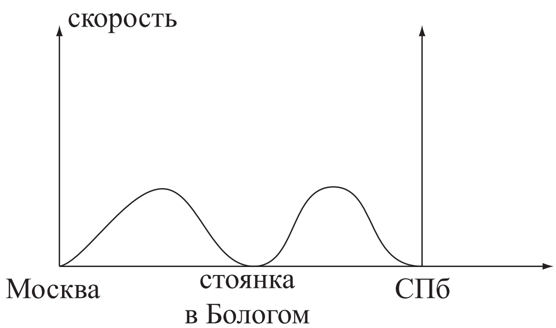

Рис. 57. График изменения скорости поезда Москва — Петербург: скорость, с которой поезд выезжает, сначала слегка увеличивается, потом достигает максимума и далее обращается в нуль (остановка поезда в Бологом). После этого скорость снова растет, чтобы не было опоздания в пункт назначения.

Обоснование этого факта изложено ниже.

Эта задача разобрана в книге, которую я всем рекомендую: Р. Курант, Г. Роббинс, «Что такое математика?». Еще раз отмечу, что мне в этой задаче известен точный график движения поезда.

Ключ к решению этой задачи — в использовании идеи *непрерывности.* Мы один раз уже с ней столкнулись в предыдущей задаче: есть такой импульс, получив который, палка не упадет ни направо, ни налево. Она встанет вертикально, но через бесконечное время. Задача про вагон, в котором движется железный стержень на шарнире, напрямую относится к предыдущей. Давайте посмотрим. Если палка уже лежит, то она будет всегда лежать. Она никогда никуда не встанет. А теперь рассмотрим для каждого начального угла поворота этой палки, в какое положение она в конечном счете ляжет: направо или налево. А если она останется висеть, значит, мы нашли то, что нам нужно.

Если палка ляжет, то она ляжет в одно из этих двух положений. Причем уравнения движения таковы, что если чуть-чуть поменять угол, совсем чуть-чуть, сторона падения не изменится. Если палка падала направо, то чуть-чуть изменив угол, вы не измените результата. *Она всё равно упадет направо.* Тем самым, если в одном положении она падала, скажем, направо, значит, и в близких начальных положениях она тоже должна падать направо. То есть, как говорят математики, множество положений, в которых она упадет направо — *открытое множество.* «Открытое» — значит, вместе с какой-то точкой содержит все близкие к ней точки. Если из какого-то положения палка падает, то из всех достаточно близких положений она упадет в ту же сторону.

Интуитивно понятно, что мы можем всегда приподнять палку настолько мало, что она непременно упадет обратно. Давайте медленно изменять положение палки. В каких-то положениях она будет падать направо, а в каких-то — налево. Значит, где-то есть переход, угол, такой, что всюду справа она падает направо, всюду слева — налево*. Что же это за угол? Единственный факт, который мы можем сообщить про этот угол, это что для такого угла палка не упадет вообще. Ничего другого про него не известно. Парадоксально, но это факт! Если вы в это поверили (а я вас не обманываю), тогда в том, что в близком к вертикальному положению палка может находиться сколь угодно долго, вас убедит следующее соображение. На стоянке в Бологом поезд может стоять 10 минут, а может — час. И в течение этого часа палка не упала. Она ведь не падала всю дорогу, в частности, она не упала и в течение стоянки. Что же она делала в это время?

Слушатель: Двигалась.

А.С.: Она находилась очень близко к вертикальному положению. Потому что, если бы она чуть-чуть от него отклонилась, она рухнула бы. Поэтому во время стоянки она была очень близко к вертикальному положению. А так как стоянка может быть сколь угодно долгой, из этого следует, что палка в районе вертикального положения может находиться сколь угодно долго. Поэтому-то она будет подниматься в него бесконечное время.

Это — наше второе знакомство с бесконечностью. Сейчас будет третье.

*Можно доказать, что такое граничное положение — единственное.

Слушатель: Гвоздь программы.

А.С.: Бесконечность — это гвоздь программы, безусловно. Потому что бесконечность — это центральное понятие в математике. Математика — это шаг через бесконечность. Освоение математики — это когда вы становитесь с бесконечностью «на ты». И чем больше вы «на ты» с бесконечностью, тем лучше вы понимаете математику. Это — наука о бесконечности. В этом смысле математика и религия дополняют друг друга. Религия — это знание о бесконечности, математика — это наука о бесконечности. Это две ипостаси бытия.

Сейчас мы поговорим о бесконечности в некотором другом разрезе, геометрическом.

Помните ли вы, что такое квадратный корень? Корень квадратный из 100 — это 10. Потому что $10 \times 10 = 100$. А вот что такое корень квадратный из двух — это не так понятно. А что такое рациональное число? Если вы не знаете, не страшно. Но что такое целое число, знают все. Целые числа — это ноль, один, два, три, четыре, пять, шесть и так далее в положительную сторону, но также минус один, минус два, минус три, минус четыре и так далее — в отрицательную. У древних была большая проблема с отрицательными числами. Число, бесконечность, уравнение — это всё то, с чем математики всё время имеют дело. Что такое число? Для древних число — это то, чем мы считаем предметы. Более того, до сих пор натуральными числами часто называют числа, используемые для подсчета предметов. Ноль — это для древних уже было что-то странное. Число или не число? Натуральное ли оно? Ноль — это отсутствие предметов. Отсутствие — это количество или нет? Сколько крокодилов в нашей комнате?

Слушатель: Ноль.

А.С.: Значит, вы считаете, что ноль все-таки натуральное число*. А отрицательных чисел у древних греков не было. Вот если бы математика началась в России, то проблем с этим не было бы.

*В России натуральные числа по традиции начинаются с единицы. То есть ноль является целым числом, но не является натуральным.

Потому что -1, -10 — это мороз, снег идет. Всё понятно — на улице отрицательная температура.

Когда я учился в школе, к нам как-то приехали американцы. И они сказали, что уровни умственного развития школьников в России и в Америке различаются как небо и земля*. На что я заметил, что всё очень просто. В Америке редко бывают отрицательные температуры, и поэтому у школьников есть проблема с постижением отрицательных чисел. Американец сильно задумался (тем более, что у нас — градусы Цельсия, а у них — Фаренгейта!).

Действительно, у нас и трехлетние дети знают, что такое -5 и -3. Это когда снег, и мама на голову шапку надевает.

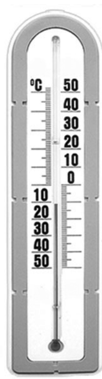

Рис. 58. Наружный термометр — инструмент для освоения отрицательных чисел.

Это вот ваш градусник (рис. 58).

Нулевая температура. А может, 1, 2, 3, -1, -2, -3 ... градусов. Но между ними тоже что-то есть.

Слушатель: Да.

А.С.: Я же могу сказать, что сейчас два с половиной градуса выше нуля?

Слушатель: Да.

*Ради справедливости надо заметить, что эта беседа проходила в школе № 57.

А.С.: Или три и три четверти градуса.

Слушатель: Да.

А.С.: То есть я могу назвать доли. Их сейчас даже в детсаду рассматривают.

Пришло ко мне на день рождения 15 детей. И, допустим, у меня есть 23 яблока. Я взял нож и аккуратно разрезал яблоки на 15 равных частей каждое. Каждому ребенку достанется $\frac{23}{15}$ яблока, то есть по 23 дольки.

Это — число между единицей и двойкой:

$$1 < \frac{23}{15} < 2.$$

Такие числа древние отлично знали. Мы их называем *рациональными*, а они их называли дробями или просто числами. Рациональное число — это число, которое может выражать количество яблок, разделенное на количество детей. Пришло вот к вам «n», целое ненулевое число детей, а у вас имеется «m» — целое число яблок. Получаем рациональное число $\frac{m}{n}$. Числитель дроби может быть меньше нуля.

Ну, скажем, у вас было -5 яблок, и пришло 7 детей. Каждый получил $-\frac{5}{7}$ яблок.

Слушатель: Бедные дети...

А.С.: Или вы позвали 30 гостей на день рождения и сказали: «У меня -700 тысяч рублей, в смысле, я должен за квартиру 700 тысяч рублей. Скиньтесь, пожалуйста, поровну». Вот вам и минус: $-\frac{700}{30}$. Когда вы говорите о таких вещах, как долги, то сразу вылезают отрицательные числа. Я предлагаю вам понять, что все эти числа живут где-то на числовой прямой. Число $\frac{5}{7}$ живет где-то между нулем и единицей (рис. 59). Давайте начнем шагать по оси шагами в одну сотую. Мы, на наш взгляд, целиком замостим нашу прямую: $\frac{211}{100}$, $-\frac{135}{100}$ и т. д.

И замостить вы можете сколь угодно плотно, можно ведь шагать шагами, равными $\frac{1}{1000}$ или $\frac{1}{1000000}$. Где бы вы ни сидели

Рис. 59. Шаги-то получились меньше, чем точка от мелка!

на числовой оси, где-то рядом с вами, очень близко живет число вида $\frac{m}{n}$.

Математики употребляют в такой ситуации страшный термин *«всюду плотное множество»*. Это такое множество, в котором, куда бы вы ни сунулись, в любой близости от вас будут точки этого множества. Рациональные числа образуют всюду плотное множество на числовой оси. Вроде как вся прямая ими заполнена. Вполне можно было бы ожидать, что никаких чисел больше нет. Это логично, но это неправда. Древние обнаружили, что есть числа, заведомо не представимые в виде $\frac{m}{n}$, ни при каких целых m и n (врезка 5).

Врезка 5. «Причина смерти — корень из двух!»[*]

Говорят, что пифагорейцы (ученики знаменитого философа и математика Пифагора) сначала верили, что для вычислений вполне хватает положительных рациональных чисел, и что в этом проявляется божественная гармония окружающего мира. Однако «не в меру способный» ученик Пифагора додумался до того, что строго доказал НЕИЗМЕРИМОСТЬ диагонали квадрата (с единичной стороной) с помощью рациональных чисел. Пифагорейцы в гробовом молчании выслушали его доказательство и не смогли его опровергнуть. Гармония мира оказалась под угрозой! Поэтому было принято решение: никому про это не рассказывать, а нарушителя мировой гармонии наказали... утоплением в реке, на берегу которой всё это и происходило. К счастью для математики, истина потом всё равно «воссияла».

---

[*]За достоверность этой истории автор книги ответственности не несет.

Вот я и утверждаю, что корень из двух — именно такое число. Возьмем 4 квадрата со стороной единичка. И составим из них новый квадрат (рис. 60).

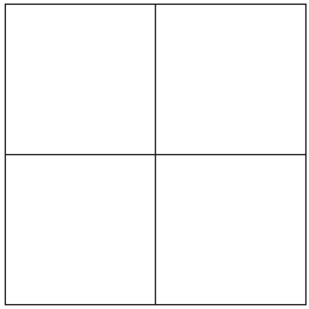

Рис. 60. Нарушители мировой гармонии — за работой.

Какой площади один маленький квадратик?

Слушатель: 1.

Какой площади будет получившаяся фигура?

Слушатель: 4.

А.С.: Теперь я делаю следующее. Я провожу диагонали (см. рис. 61) и спрашиваю вас, чему равна площадь получившегося внутри квадрата?

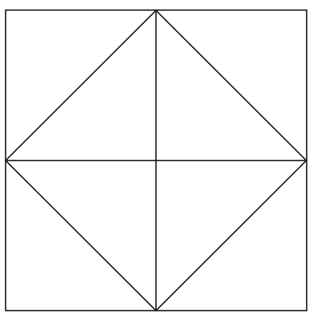

Рис. 61. Внутренний квадрат — вдвое меньше по площади.

Слушатель: 2.

А.С.: Почему? Потому что в каждом маленьком квадратике ровно половину взяли, а половину не взяли. Итак, совершенно очевидно, что площадь этой фигуры вдвое меньше, чем у большого квадрата. С другой стороны, мы знаем, что если у квадрата сторона a, то площадь его равна $a \cdot a = a^2$.

Нам нужно найти сторону квадрата с площадью 2. А это и есть корень из двух. Значит, если у квадрата сторона 1, то его диагональ имеет длину «корень из двух» (рис. 62).

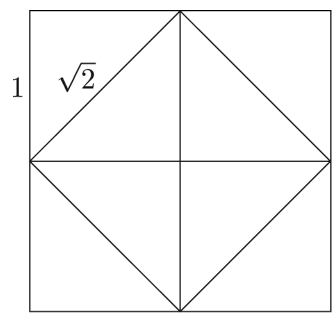

Рис. 62. Сторона внутреннего квадрата равна корню из двух по двум причинам: алгебраическая причина — теорема Пифагора и определение корня; геометрическая причина — соотношение площадей наружного и внутреннего квадратов равно двум.

А.С.: Из школьного курса вы знаете теорему Пифагора.

Слушатели: Да.

А.С.: Теорема Пифагора говорит, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов*. Давайте я покажу доказательство этого без единой формулы. Теорему Пифагора не нужно доказывать формулами, ее нужно просто узреть, увидеть, она видна. Вот смотрите, я беру вот такое равенство: $a^2 + b^2 = c^2$.

*Гипотенуза — сторона прямоугольного треугольника, лежащая напротив прямого угла. Это самая длинная сторона в прямоугольном треугольнике. Катет — сторона прямоугольного треугольника, прилегающая к прямому углу. В прямоугольном треугольнике имеется два катета и одна гипотенуза.

Мне нужно его доказать для любого прямоугольного треугольника со сторонами a, b, c (рис. 63).

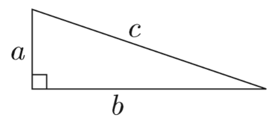

Рис. 63. Для такого треугольника мы ниже докажем теорему Пифагора методом «Взгляни на чертеж — из него всё ясно».

Беру два квадрата со стороной $a + b$.

Они будут одинаковые, но я их по-разному разобью на части (рис. 64).

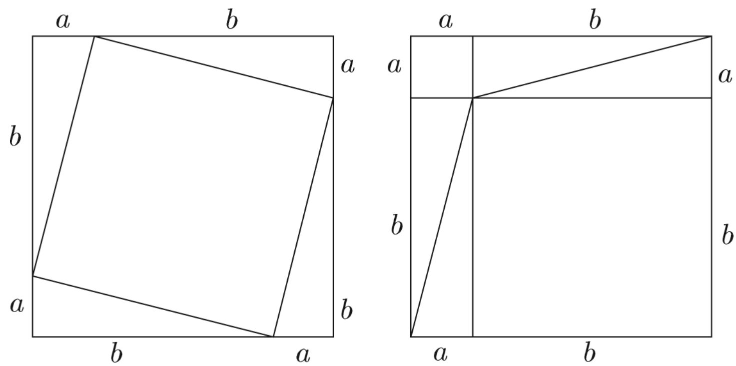

Рис. 64. Слева и справа виден квадрат со стороной $a + b$. Он по-разному разбит на части, но и там, и тут мы видим 4 одинаковых треугольника (их стороны указаны на рис. 63). Убирая эти треугольники, слева видим квадрат гипотенузы, а справа — сумму квадратов катетов. Вот и всё доказательство.

Площадь внутри левого квадрата равна c^2.

Площади квадратов внутри правого квадрата равны a^2 и b^2.

Теперь смотрите, правый квадрат состоит из 4 треугольников и двух квадратов, а левый — из четырех таких же треугольников и одного квадрата. Но внешние квадраты имеют одинаковые площади. Из площади первого квадрата я вычел 4 одинаковые площади и из площади второго квадрата те же 4 площади. Значит, площади оставшегося должны быть одинаковыми. В одном случае остается c^2, а в другом — сумма $a^2 + b^2$. Значит,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Теорема Пифагора доказана. Но это было небольшое отступление. Я хотел сказать, что диагональ квадрата со стороной 1 по теореме Пифагора равна корню из двух, согласно тому, что я нарисовал, она и в самом деле ему равна. Древние ничего не могли с этим числом поделать. Потому что, если отложить отрезок, равный нашей диагонали, от нуля, то вы попадете в точку, которая заведомо не равна никакому числу вида $\frac{m}{n}$. Ни при каких m и n. Вы переберете все целые числа, и в числителе, и в знаменателе, и никогда не получите число, которое в точности совпадет с корнем из двух.

Есть очень много разных доказательств этого факта, и одно из них совершенно геометрическое. Мы разберем ниже два разных доказательства.

Мы сейчас придумаем некую процедуру, которую мы применим к любому рациональному числу, и она всегда будет конечной. А дальше, я вам покажу, что та же самая процедура для числа **«корень из двух»** никогда не прекращается, тем самым это число не может быть рациональным

Слушатель: То есть это несуществующее число?

А.С.: Существующее, но не в этом круге подозреваемых лиц. Это число существует, и оно очень нервировало греков, они не хотели допустить, что оно существует. Однако они отлично знали, что оно нужно для вычислений, но не выражается в виде отношения целых чисел. Они не понимали, что с ним делать. Вроде число не существует, а оно-таки есть. Оно не должно существовать, но оно существует. Числа, которые не представляются в виде $\frac{m}{n}$, называются *иррациональными*.

Что такое вообще «иррациональность»? Нелогичность. Неразумность. Иррациональное поведение, например. Но в математике, в отличие от философии, есть совершенно конкретные объекты, иррациональные числа. Это такие числа которые не представляются в виде $\frac{m}{n}$. Тем не менее, они вполне себе логичные и очень даже разумные.

Слушатель: А числа m и n, они целые?

А.С.: Целые. Непременно целые числа. Иррациональные числа — это числа, которые не являются отношением двух целых чисел. Рациональное число — это отношение двух целых.

Есть еще одно труднопроизносимое слово, оно тоже в философском смысле кое-что означает. Слово *«трансцендентно»*. Что же оно означает в житейском (не математическом) смысле?

Слушатель: Находится за пределами.

А.С.: За пределами чего бы то ни было.

Слушатель: То есть иррациональное поведение — это поведение странное, но всё же в каких-то рамках. А трансцендентное — это что-то за пределами понимания окружающих.

А.С.: В математике *трансцендентные числа* — это тоже определенный термин. Им противопоставляются *алгебраические числа*. Согласно строгому математическому определению, *алгебраическое число* — это корень многочлена с целыми коэффициентами. *Трансцендентным числом* называется такое число, что ни один многочлен с целыми коэффициентами не обнуляется при подстановке вместо переменной x этого числа.

Внутри множества алгебраических чисел живут как все рациональные, так и корни любой степени и много, много чего еще. Очень много разных чисел. И вот трансцендентные — это те числа, которые не являются алгебраическими. Выдумать неалгебраическое число достаточно трудно. Сначала думали, что все числа алгебраические. А в XIX веке произошел взрыв в математике, было обнаружено огромное количество неалгебраических чисел — но это было только в XIX веке. Примером трансцендентного числа является знаменитое число «пи» — длина окружности с диаметром, равным 1. Доказательство трансцендентности одного-единственного числа «пи» занимает 10 лекций на 4-м курсе мехмата МГУ. Очень мало людей на Земле, которые знают это доказательство. Это — труднейшая теорема. А вот про иррациональность корня из двух всё очень просто.

Я представлю вам два разных доказательства: одно будет длинным, но геометрическим (и оно будет полезно для изучения других тем), второе — короткое стандартное доказательство.

Я проведу некую процедуру; ну, сделал это не я, а не кто иной, как Евклид 2,5 тысячи лет назад. Называется эта процедура *алгоритмом Евклида.* Разновидность алгоритма Евклида называется *цепной дробью.* Цепная дробь — это очень просто. Любое число можно разложить в цепную дробь. Ниже я покажу, что числа вида $\frac{m}{n}$ в цепную дробь раскладываются конечным образом, а **корень из двух** в цепную дробь раскладывается только бесконечным образом.

Приведу пример: дробь $\frac{21}{13}$.

Давайте посмотрим, как превращать это число в цепную дробь. Выделим из этой дроби целую часть. Между какими двумя целыми числами она расположена?

Слушатель: Между 1 и 2.

А.С.: Правильно. Значит оно равно 1 плюс сколько?

Слушатель: Мне трудно из 21 вычесть 13.

А.С.: Ничего. Я вычту.

Слушатель: 8, да?

А.С.: Правильно, да.

$$\frac{21}{13} = 1 + \frac{8}{13}.$$

Но это не всё, что я хотел сказать. Потому что я напишу так. Один плюс один разделить на тринадцать восьмых:

$$\frac{21}{13} = 1 + \frac{1}{\frac{13}{8}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{5}{8}}.$$

Этот фокус с переворачиванием дроби «вверх ногами» и выделением целой части из знаменателя мы будем повторять до тех пор, пока будет возможно. А возможность такая будет нам представляться до тех пор, пока на очередном шагу после выделения целой части дробная часть не окажется равна нулю. Если этого никогда не случится, то исходное число окажется разложенным в бесконечную цепную дробь.

Итак, продолжим разложение числа $\frac{21}{13}$ в цепную дробь:

$$1+\frac{1}{1+\frac{5}{8}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{8}{5}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}}=\ldots=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}}=$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}.$$

Стоп, машина. После выделения целой части из числа 2 дробная часть **равна нулю**. Значит, числу $\frac{21}{13}$ «суждено» разлагаться в конечную цепную дробь. Если кто не верит, можете упростить эту «6-этажную» дробь, сделав из нее обыкновенную. Конечно, она будет равна $\frac{21}{13}$.

Эту операцию придумал Евклид. Называется она — разложение числа в «цепную дробь». Обратите внимание. На последнем шаге мы попали в целое число 2 при переворачивании дроби $\frac{1}{2}$. На этом всё заканчивается, так как из целого числа не удастся выудить дробную часть.

Другой пример:

$$\frac{20}{17}=1+\frac{1}{\frac{17}{3}}=1+\frac{1}{5+\frac{2}{3}}=1+\frac{1}{5+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}.$$

Опять пришли к целому числу. Ура. Закончили.

Евклид утверждал, что для любой дроби за конечное число шагов мы придем к целому числу. Попробую это пояснить «без формул». Вы берете какую-то очень большую дробь, например, $\frac{17284}{3415}$.

Что происходит в процессе, предложенном Евклидом? Мы просто несколько раз делим с остатком, и всё. На каждом шагу мы получаем «нечто» плюс что-то меньшее, чем то, на что мы делим. Идея в том, что на каждом шагу числа будут уменьшаться. Числитель и знаменатель — целые положительные числа, и они будут уменьшаться. Но целое число, любое положительное целое число, не может бесконечно долго уменьшаться, оно в конце концов «закончится». Оно придет к нулю за конечное число шагов.

То есть любое рациональное число непременно порождает конечную цепную дробь. А теперь я возьму и покажу, что корень из двух порождает бесконечную цепную дробь.

Вот этот фокус-покус. Если «корень из двух» — рациональное число, то процедура, которую я только что проводил, должна закончиться. Берем **корень из двух**. Между какими целыми числами он расположен? Вспомним, что, согласно теореме Пифагора, корень из двух — это длина диагонали квадрата с единичной стороной. Поэтому он расположен между 1 и 2 (см. рис. 65).

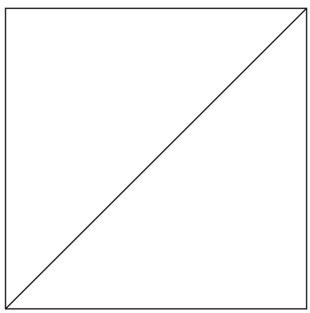

Рис. 65. Ловись, дробная часть — большая и маленькая! Видно, что диагональ больше стороны, но меньше суммы сторон.

Значит, **корень из двух** $=1+$ дробная часть (она примерно равна $1{,}4142-1=0{,}4142$).

Что я сделал? Прибавил единицу и отнял единицу. Больше ничего не делал. То есть я выделил целую часть из «корня из двух» (дробная же часть записана в скобках; она равна примерно 0,414).

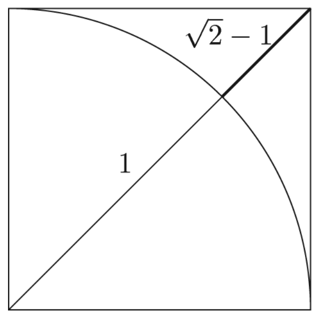

Рис. 66. Выделенный отрезок и есть «корень из двух минус один».

Для получения дробной части я взял окружность радиуса 1, провел ее до пересечения с диагональю, и всё (см. рис. 66). Эта часть, без сомнения, меньше единицы. Далее для краткости обозначим «корень из двух» через К. А выражение $\text{К} - 1$ обозначим за С. Значит, $\text{С} < 1$. Поэтому будем эту часть «переворачивать»:

$$\text{С} = \frac{1}{\frac{1}{\text{С}}} = \frac{1}{\text{К}+1}.$$

Поясню, почему $\frac{1}{\text{С}}$ превратилось в $\text{К} + 1$.

Я возьму числитель и знаменатель и домножу на одно и то же число (это не изменит значения дроби). Я числитель и знаменатель умножу вот на такое число: $\text{К} + 1$. Помним, что $\text{К} \cdot \text{К} = 2$.

Начинаем открывать скобки:

$$\frac{1}{\text{С}} = \frac{(\text{К}+1)\cdot 1}{(\text{К}+1)\cdot(\text{К}-1)} = \frac{\text{К}+1}{\text{К}\cdot\text{К}-1} = \frac{\text{К}+1}{2-1} = \text{К}+1.$$

А теперь, по общему правилу, выделяем целую часть.

Между каким двумя целыми числами находится $\sqrt{2}+1$?

Слушатель: Между двойкой и тройкой.

А.С.: Конечно. Поэтому, если я по правилу Евклида выделяю из него целую часть, то она равна?

Слушатель: 2.

А.С.: Значит, я должен написать так:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \text{новая дроб.часть}} = 1 + \frac{1}{2 + 0{,}414\ldots}.$$

Не правда ли, мы уже сталкивались выше с такой дробной частью?

Слушатель: И так до бесконечности будет повторяться?

А.С.: И так до бесконечности. Значит, исходное число — не рациональное.

Мы получим *бесконечную* цепную дробь:

$$\text{K} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}.$$

Только бесконечное число шагов приведет вас к числу, равному K*. Но не конечное — а значит, число K иррационально, что и требовалось доказать. Теперь вы знаете, что есть такие числа, страшные числа, которые не представляются в виде «количество яблок поделить на количество гостей».

Мы еще вернемся к цепным дробям, ибо в них прячется истинная бесконечность.

Пока что дадим стандартное книжное доказательство того, что корень из двух — число не рациональное. Проводится оно от противного.

Предположим, что

$$\text{K} = \frac{m}{n}. \tag{3}$$

Тогда, если можно, сократим эту дробь. То есть, если m делится на простое число p, и n делится на то же самое простое число p, поделим и числитель, и знаменатель на p. После того как мы сократили всё, что только можно, одно из чисел обязательно будет нечетным. Может быть, оба нечетные, но по крайней мере одно

*Точный смысл этих слов проясняется в математическом анализе, через понятие предела последовательности.

из них точно будет нечетным. Потому что если оба четные, значит, можно было еще раз сократить на 2.

Рассмотрим квадрат равенства (3):

$$2 = \frac{m^2}{n^2}.$$

Получим $m^2 = 2n^2$.

Это значит, что если на сетке нарисован квадратик с целочисленной стороной, то в нём количество единичных квадратиков такое же, как удвоенное количество квадратиков какого-то другого квадрата с целочисленной стороной (рис. 67).

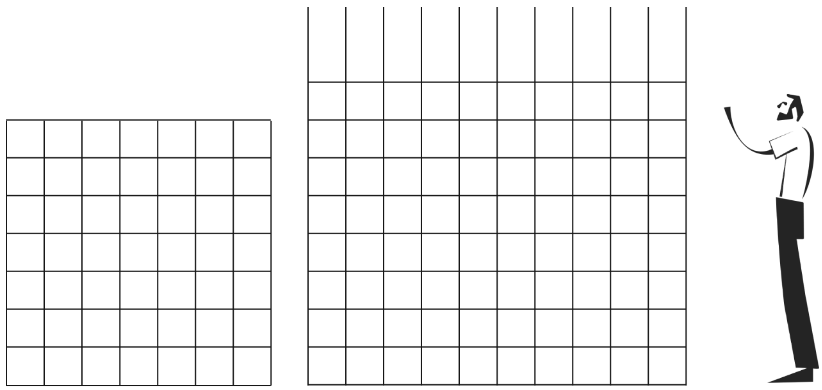

Рис. 67. Что-то не получается нарисовать два таких квадрата. И это — неспроста!

Значит, если K — рациональное число, то $m^2 = 2n^2$ — верное равенство. Тогда m — число четное, потому что оно делится на 2. Но если m делится на 2, то это значит, что $m = 2k$ для некоторого целого числа k. Тогда $m^2 = 4k^2$.

Подставим в $m^2 = 2n^2$ значение для m^2. Получим $4k^2 = 2n^2$.

Сократим на 2, получится $2k^2 = n^2$.

Но тогда n тоже делится на 2. А значит, мы в начале этого процесса недосократили. Но мы же договорились досократить всё, что возможно. В этом и заключается противоречие — с тем фактом, что в выражении $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ можно добиться того, что хотя бы одно из чисел m, n будет нечетным.

То, что $\sqrt{2}$ никогда не представляется в виде $\frac{m}{n}$, на самом деле означает то же самое, что равенство $m^2 = 2n^2$ всегда неверно. Никогда не получится взять один квадрат с целыми сторонами, умножить его площадь на два и получить другой квадрат с целыми сторонами (удвоенной площади). Ни для каких целых чисел.

Попробуем копнуть этот вопрос поглубже.

А может ли быть так, что они почти будут равны, например, $m^2 = 2n^2 \pm 1$?

Вдруг мы сможем взять какие-нибудь огромные числа, возвести их в квадрат, умножить одно из них на 2 и выяснить, что результаты отличаются на 1. Может ли такое быть или нет? И если может быть, то насколько часто такое бывает? И можно ли полностью описать все пары целых чисел (m, n), которые удовлетворяют уравнению $m^2 = 2n^2 \pm 1$? Вопрос, который ставился еще древними — он называется «решение *Диофантовых уравнений* в целых числах».

Диофант жил в Александрии в III веке нашей эры. Он оставил после себя 13 томов математических изысканий, 6 из них худо-бедно, но дошли до нас, 7 — полностью и безвозвратно потеряны. 6 томов его изысканий до сих пор питают умы математиков. Диофант писал всё словесно. Примерно так: «Может ли быть такое, что одно число, будучи взятое то же самое число раз (то есть $n \cdot n$) и еще столько же раз (то есть $2n \cdot n$), отличалось бы от другого числа, взятого другое же число раз (то есть $m \cdot m$) всего лишь на единицу?» Так он записывал уравнение

$$2n^2 = m^2 \pm 1.$$

Можно ли такое уравнение решить в целых числах или нет? Мы пишем символами, поэтому далеко продвинулись в математике. Но все идеи буквально, буквально все подряд были в этих шести томах. Если чего-то в них не было, то, видимо, оно было в пропавших. Но мы уже не узнаем этого.

Диофант — человек, оставивший фантастическое наследие. В 1651 году Пьер Ферма читал книгу Диофанта по целочисленной арифметике. Читал и комментировал ее на полях. А сын Ферма издал книгу с комментариями своего отца. На полях был кладезь математических сокровищ. В частности, в одном месте было обнаружено следующее. У Диофанта решалось в целых числах уравнение $a^2 + b^2 = c^2$. То есть он пытался выяснить, может ли быть так, что все числа целые? Древним было хорошо известно, что такое может быть. Например, числа (3, 4, 5), и много-много других примеров.

Первое решение, возможно, даже имело практическое применение 2,5 тысячи лет назад. Берем веревку, делим ее на 12 равных частей, завязываем узелки в местах деления. После чего связываем веревку в кольцо и делаем из нее треугольник так, чтобы на одной стороне было 5 узелков, на другой 4, а на третьей — 3.

И вот вы получили прямой угол кустарными средствами. Это очень важно.

Землемеру этого хватит. Всё. У него веревка с 12 узлами есть, и отлично. Но математик всегда хочет пойти до конца. Все варианты найти, все целые a, b, c — такие, что получается прямоугольный треугольник. Задача древнейшая. Ответ был известен еще древним индусам. «Пифагоровы тройки» — вот как называются эти решения. Интересно то, что в этом месте слева на полях было написано рукой Ферма приблизительно следующее: «Вместе с тем, невозможно разложить никакой куб в сумму двух кубов, никакую четвертую степень в сумму двух четвертых степеней и вообще никакую произвольную степень числа в сумму двух таких же степеней. Я нашел этому факту поистине удивительное доказательство, но на полях оно не поместится». Это — начало истории величайшей загадки математики — **великой теоремы Ферма**.

Ферма утверждает, что при n большем, чем 2, уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

не имеет решения в целых числах. То есть, конечно, можно взять $x = y = z = 0$. Или, если мы поставим $x = 0$, тогда y и z могут быть любыми одинаковыми. Но это всё неинтересно. А вот если ноль запретить, то если мы ищем среди *положительных* целых чисел x, y, z решения этого уравнения, то их нет, вообще нет. Ни одного, ни одной тройки (x, y, z), ни для какого n, большего чем 2, то есть ни при $n = 3$, ни при $n = 4$, ни при каком n.

Эта загадка была страшно популярной среди широких масс населения — уж больно просто формулируется эта теорема (да еще какой-то чудак завещал крупную сумму тому, кто справится с доказательством теоремы Ферма). Но и опытные математики были озадачены. Дело в том, что все утверждения, которые Ферма оставил без доказательства, оказались правильными (их все доказали после его смерти), а с этим творилось черт знает что: начали все сходить с ума, потому что всё кажется просто, и хочется взять ручку и начать писать. Вот вы мне не поверите, но когда мне было 10 лет, я этим занимался, честно. Но всё это безумие продолжалось только до 1994 года.

В 1994 году она была полностью доказана нашим с вами современником математиком Эндрю Уайлзом. На самом деле ему предшествовали 30 разных имен, которые долго в разных местах подстраивали большое здание. А он просто понял, в каком месте нужно сшить то, что уже известно. В частности, безусловную важность здесь сыграла московская школа алгебраической геометрии. Последним был Уайлз, но в принципе это — всемирное творение.

Сейчас доказательство великой (или, как еще говорят, последней) теоремы Ферма входит в книгу А. А. Панчишкина, Ю. И. Манина «Введение в современную теорию чисел». Толстенная сложнейшая книга по теории чисел, 7-я глава целиком посвящена теореме Ферма.

Ну а теперь фокус-покус, ладно? А то лекция уже кончается.

Берем нашу цепную дробь для «корня из двух»:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}.$$

Обрубаем, получаем приближенное значение для корня из двух:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}.$$

Такую дробь можно превратить в некоторое рациональное число, то есть в некоторое отношение двух целых чисел. Сейчас превратим. Получается $\frac{41}{29}$.

Всё отлично.

А вот теперь берите калькулятор, пожалуйста. И возводите в квадрат 41 и 29. Не забудьте, что 29 в квадрате при этом надо умножить на 2, «по просьбе Диофанта»:

$$41^2 = 1681,$$
$$29^2 = 841,$$
$$841 \cdot 2 = 1682.$$

Ура! Они отличаются на единицу. Это те самые решения нашего уравнения

$$m^2 = 2n^2 \pm 1. \tag{4}$$

Мы нашли решение этого уравнения. Причем нетривиальное.

Теорема, которую я доказывать не буду (хотя она и не очень сложная), гласит: *Где бы вы ни обрубили данную цепную дробь, всегда получается решение нашего диофантова уравнения.*

Слушатель: Любое число разложу в цепную дробь, обрублю и получу решение какого-то похожего уравнения?

А.С.: Не для любого. Для любого числа, не являющегося квадратом. И обрубать надо будет аккуратнее, не в любом месте, как в случае с корнем из двух.

Например, уравнение $m^2 = 9n^2 \pm 1$ не получится решить таким способом (впрочем, несложно показать, что у него всего два тривиальных решения $(1,0)$ и $(-1,0)$). Но таких чисел довольно мало. Что же я могу подставить вместо 2 в уравнение (4): 3 — могу, 4 —

не могу, так как квадрат; 5, 6, 7, 8 — могу, 9 — не могу, 10, 11, 12, 13, 14, 15 — могу, 16 — не могу, и так далее. Уравнение такого вида (см. подробнее об этом в следующей лекции) носит название *уравнение Пелля.* И, как обычно это бывает, Пелль не имеет к нему никакого отношения. В математике очень много фактов названо именами людей, которые никакого отношения к этому факту не имели. Шутки ради это явление математики тоже назвали «теоремой». Вот, получилось так, что эту теорему назвали теоремой Арнольда. Она *самоприменимая* (то есть Арнольд не является автором этой теоремы). Шутливую «Теорему Арнольда» придумал, вроде бы, Николай Николаевич Константинов и назвал теоремой Арнольда специально для того, чтобы она была самоприменимой, чтобы она тоже называлась не именем человека, который ее выдумал, а другим. Математики мыслят логически, даже когда они шутят!

Давайте все-таки, чтобы вас убедить, пообрубаем эту дробь в разных местах. Смотрите. 1 — это ведь «1 разделить на 1». Если подставить в уравнение (4) $m = n = 1$, то что получится?

$$1^2 = 2 \cdot 1^2 - 1$$

(то есть (4) выполняется).

Обрубаем дальше. Будет $\frac{3}{2}$.

Подставляем: $9 = 2 \cdot 4 + 1$.

Обрубаем еще раз. Получаем $\frac{7}{5}$. Подставляем.

$$49 = 2 \cdot 25 - 1.$$

Вы видите, что теорема верна.

Гуманитарию уже не надо доказывать теорему, он уже «видит», что она верна. Но математику нужно ее доказать, нужно установить, что это действительно всегда будет так. Мало того, оказывается, что все такие обрубания дадут вам решения этого уравнения, и других решений в задаче нет. Вообще никаких.

Слушатель: Ну, или мы просто не нашли?

А.С.: Нет. Доказали, что больше не существует.

Ну, последний фокус-покус. Но берегитесь, он страшный. Знаете ли вы, что такое *бином Ньютона*? Это — правило, по которому раскладываются выражения, в которых вы много раз умножили одну скобку на себя. В школе проходят $(a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$. Еще проходят: $(a+b)(a+b)(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Но есть некая формула, которая верна всегда, для любого количества скобок. Считается, что ее придумал Ньютон, но на самом деле ее, скорее всего, знали и до него. Просто он ее огласил. Так вот, бином Ньютона тоже помогает искать решения уравнения $m^2-2n^2 = \pm 1$.

Ниже мы снова за К обозначим корень из двух.

Возьму $(1+\text{К})^2 = 1+2\text{К}+2 = 3+2\text{К}$. Решением будет пара $(m=3,\ n=2)$, и мы уже выше встречались с ним. Но, может, это случайно так совпало?

Возведение в куб вас должно уже убедить. Имеем:

$$(1+\text{К})^3 = 1+3\text{К}+6+2\text{К} = 7+5\text{К}.$$

Не правда ли, это следующее решение нашего уравнения? Здесь $m=7$, $n=5$.

Возведем в четвертую степень. А это всё равно, что возвести два раза во вторую, один раз в нее мы уже возводили.

$$(1+\text{К})^4 = (3+2\text{К})^2 = 9+12\text{К}+8 = 17+12\text{К}.$$

Проверяем:

$$17^2 = 289,$$
$$12^2 = 144,$$
$$144 \cdot 2 = 288.$$

Получается: $289 = 288+1$.

Это работает!

До встречи на лекции 4.

Лекция 4

А.С.: На прошлой лекции я сказал кое-что про решение уравнения вида $x^2 - 2y^2 = \pm 1$. Тогда обозначения были другие. Но на то это и математика, что «хоть горшком назови». В этой лекции переменные, значения которых мы ищем, будут обозначаться «x» и «y». Теперь кое-что уточним. Можно взять вместо числа 2 любое натуральное число m и записать аналогичное уравнение: $x^2 - my^2 = \pm 1$.

В принципе, почти ничего не изменится в общем ходе решения. Единственный вариант, при котором будут различия, это когда m представляется в виде квадрата натурального числа (4, 9, 16, 25…), — тогда такое уравнение по неким очевидным причинам никаких решений, кроме $x = \pm 1$, а $y = 0$, не имеет.

В самом деле, попробуем найти нетривиальные решения уравнения $x^2 - 9y^2 = \pm 1$, то есть $x \cdot x = (3y) \cdot (3y) \pm 1$. При «$y$», не равном нулю, получается, что квадраты двух целых чисел «x» и «$3y$» отличаются на единицу. Так мало они отличаться НЕ МОГУТ. Даже квадраты соседних целых ненулевых чисел (скажем, M и $M + 1$) отличаются больше, чем на 1, а именно: отличие их равно $2M + 1$, причем M не равно 0.

Для всех остальных m прием, которым мы пользовались ранее при решении этой задачи, срабатывает. А прием этот был такой: нужно корень из m разложить в цепную дробь. То есть выделяем целую часть, потом «переворачиваем» оставшуюся дробную часть, получаем число, большее единицы, в нём опять выделяем целую часть, и так далее:

$$\sqrt{m} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \ldots}}}}.$$

Я сказал в лекции 3, что для получения решения уравнения мы можем обрубить дробь в любом месте, привести к виду «целое число разделить на целое», и числа, которые получатся в числителе и знаменателе, будут нашими решениями. И для $m = 2$ это действительно можно делать на любом месте. Но если это утверждение применить для других значений m, то получится, что я немного обманул вас. Есть теорема, доказанная Ж. Л. Лагранжем, которая утверждает, что если мы разложим корень из числа, не являющегося квадратом, в цепную дробь, то цепная дробь начиная с некоторого места начнет повторяться. Появится период.

Врезка 6. О бессилии «наблюдения» без «доказательства»

Понятие **периода** последовательности не такое простое, как хотелось бы думать. Более того, это понятие демонстрирует бессилие прикладной математики для установления фактов чистой математики. Например, допустим, что прикладной математик изучает поведение следующей последовательности десятичных цифр: 2223222322232223... Что скажет при этом «совсем простой наблюдатель»? То, что имеется период «2223», состоящий из 4 цифр. Более «утонченный наблюдатель» возразит: не будем спешить, понаблюдаем дальше за поведением этих цифр хотя бы до 34-го места. Сказано-сделано: получили

$$22232223222322237 \quad 22232223222322237\ldots$$

Что, убедились?! Период-то имеет длину не четыре, а семнадцать! Но обиженный «простой наблюдатель» возразит: погодите радоваться. Понаблюдаем теперь хотя бы до сотого места. И увидели, что на 69-м месте (после семерки на 68-м месте) стоит не цифра 2 (как они оба ожидали), а цифра 0. Вот тут-то они призадумались... А есть ли вообще период у этой последовательности? И может ли «простое наблюдение» дать обоснованный ответ на этот вопрос? КОНЕЧНО, НЕТ! — скажет им чистый математик. Если у нас в результате наблюдения появилась гипотеза, что период равен 2223, то надо остановиться, проверить, есть ли научные предпосылки для доказательства этого (либо для опровержения этого), и продолжать исследование дальше. И если возможную длину периода не удалось определить или ограничить сверху никакими «наблюдениями», это вовсе не означает, что последовательность непериодическая! Это означает, что пока что чистому математику не удалось решить эту проблему (может, потому, что он плохо ее решал).

Это, конечно, **не означает**, будто бы мы не доказали, что для разложения «корня из двух» период начинается сразу, и длина его равна единице, а сам период равен «2». В данном случае не просто повторяются числа 2222…, начиная со второго места, а повторяются *условия* для повторения этого числа. Ниже мы не будем углубляться в эту философскую проблему, а просто предположим, что уже «кем-то» доказано наличие именно периода такой длины, и именно из таких чисел.

Мы раскладывали для самого простого случая, и в нём сразу пошел период: целые части со второго места равны 2, 2, 2, и т. д. Если бы я обрубал цепную дробь в любом месте для любого m, я совершил бы ошибку. А на самом деле обрубать нужно ровно в конце периода, то есть в том месте, где начинается повторение. Начало периода — это как раз самое большое число. В этом месте и нужно обрубать, игнорируя весь последний отрезок дроби, начиная с самого большого числа. Например, в идущем ниже примере мы доходим до 4 и обрубаем. В следующий раз можем обрубить перед второй четверкой, и т. д.

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\dots}}}}}}}.$$

Но это был модельный пример, не относящийся ни к какому m.

Например, бывает, что повторение начнется на 7 или 8 ступеньке дроби, или еще дальше. Число 61, среди первых 100 чисел, самое неприятное в нашем смысле. Ибо $\sqrt{61}$ очень долго раскладывается в цепную дробь, пока не *повторятся условия*, обеспечивающие циклическое повторение всех выделяемых далее целых частей. И поэтому самые маленькие решения уравнения $x^2 - 61y^2 = \pm 1$ будут больше миллиарда.

В костромской области каждые полгода проводится школа для сильных школьников. Вот они у нас где-то за часик этот корень из 61 раскладывали. Потом еще минут десять сворачивали дробь, и на выходе получали два числа порядка миллиарда. Которые, если подставить в наше уравнение, чудесным образом дают решение уравнения Пелля.

Цепная дробь (или алгоритм Евклида, который ее породил) может быть изложена геометрическим образом. Полезно знать, какая геометрия за этим стоит. Ниже я ее изображу.

Немного уточню теорему Лагранжа, что приблизит нас к термину *алгебраические числа*. Что такое рациональное число? Мы договорились, что это «целое делить на целое» (то есть $\frac{m}{n}$). Можно написать и по-другому. Рациональное число — это корень (то есть решение) уравнения $m - nx = 0$.

Например, $\dfrac{17}{5}$ — корень уравнения $17 - 5x = 0$. Подставьте $x = \dfrac{17}{5}$ и проверьте это.

К чему мы приходим? К более широкому подходу. Рациональные числа — это корни вот таких линейных уравнений, то есть уравнений первой степени с целыми коэффициентами.

Корнем какого уравнения является число «корень из двух» (обозначим его просто К)? Нужно написать выражение с иксом, у которого целые коэффициенты, такое, что при подстановке получится 0. Вот оно: $x^2 - 2 = 0$.

Оно 2-й степени. Вот я и говорю поэтому: К — число не рациональное. Ведь это уравнение нелинейное, оно второй степени.

А если я напишу: $x^{10} - 3 = 0$?

Что я получу на выходе? Корень 10-й степени из 3. Число не рациональное, удовлетворяющее уравнению, где слева стоит многочлен с целыми коэффициентами.

Напишем произвольное уравнение 2-й степени: $ax^2 + bx + c = 0$ (тут, конечно, «a» не равно нулю).

Такое уравнение вы, без сомнения, изучали в школе. Но вы изучали его для произвольных a, b, c. А мы будем рассматривать *только целые*. То есть многочлен, в котором целое число раз взята единица (либо минус единица) — получилось «c», потом целое число раз взят x (с тем или иным знаком) — это будет «b», и целое число раз взят x^2 (это — «a»). Решаем квадратное уравнение по известной формуле:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Мы получили выражение, использующее при своем построении операцию извлечения квадратного корня один раз. Так вот, теорема Лагранжа звучит так: если x является решением уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

с целыми коэффициентами, то тогда его цепная дробь будет либо конечной (если вдруг решение окажется рациональным), либо периодической. Верно также обратное утверждение. Если цепная дробь устроена так, что у нее, начиная с некоторого места, возникает периодическое повторение целых частей, то она удовлетворяет такому уравнению с целыми коэффициентами.

А вот теперь, опираясь на эту теорему, я могу вам дать основное определение. Число называется *алгебраическим*, если оно является корнем хотя бы одного уравнения с целыми коэффициентами произвольной длины. Не обязательно квадратного, как у нас, а произвольного (многочлен любой степени).

А *трансцендентное число* — это число, которое не является алгебраическим. С этим связана долгая история. Стоял вопрос, существуют ли трансцендентные числа вообще. Древним грекам было известно, что длина диагонали квадрата не является рациональным числом. Это было очень неудобно древним. Но, с другой стороны, она удовлетворяет элементарному квадратному уравнению, то есть является алгебраическим числом. Возникает вопрос:

все ли числа алгебраические? Ответ — нет. Математик Ж. Лиувилль, живший в середине XIX века, просто выписал конкретное число и доказал, что оно не является алгебраическим. С этого всё и началось. На самом деле алгебраических чисел неизмеримо **меньше**, чем не алгебраических, то есть трансцендентных.

Грубо говоря, если вы возьмете вещественную ось и случайно воткнете в нее булавочку нулевой толщины, вы практически наверняка попадете в неалгебраическое число.

Мы с вами на 3 лекции какую-то задачу решали с какой-то железкой (помните? — которую надо куда-то отправить, чтобы она встала в вертикальное положение). Если вы эту железку наугад взяли где-то, со свалки, установили на шарнир и стали отправлять ровно с той силой, чтобы она за бесконечное время встала в вертикальное положение, то сила, наугад взятая, будет трансцендентная. На самом деле сама железка тоже будет трансцендентной по своей длине. Есть самая большая загадка, которая обычно совершенно не понятна людям, не занимающимся математикой. Как это — *бесконечности могут быть разные*? Вот как можно представить, что бесконечности разные? Вроде бесконечность, она и есть бесконечность. Они все одинаковые. Это один наивный взгляд. Другой наивный взгляд на вещи состоит в том, что, наоборот, почти все бесконечности разные. Вот, скажем, возьмем множество всех натуральных чисел и множество всех целых чисел. Каких больше?

Слушатель: Целых.

А.С.: «В два раза больше», если вы думаете «в наивном ключе» о бесконечности. Или, так же наивно: «Чисел, которые делятся на 3, в 3 раза меньше, чем всех натуральных чисел». А и тех, и других — бесконечно много.

Оказывается, математика дает безжалостный ответ, совершенно безжалостный: целых чисел **столько же**, сколько натуральных. Как говорил один шутник: «На этот вопрос есть два мнения — одно из них Мое, а другое — Неверное». В отличие от обычного шутника, с которым можно и поспорить, с математическими «шутками» не поспоришь, ибо они обоснованы строгими доказательствами.

Слушатель: Кстати, и алгебраических чисел столько же.

А.С.: И алгебраических чисел тоже столько же, сколько натуральных. И рациональных чисел столько же, сколько натуральных, потому что единственный правильный способ, единственный непротиворечивый способ придать значению «столько же» какой-то научный смысл — это установить между двумя множествами взаимно однозначное соответствие. То есть каждому целому сопоставить некоторое натуральное и наоборот. Сделать это для множеств целых и натуральных чисел весьма просто (рис. 68):

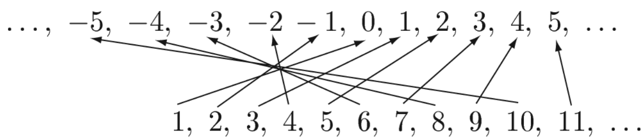

Рис. 68. Натуральных чисел хватает, чтобы перенумеровать все целые числа.

То есть вы сможете все целые числа перенумеровать. У вас каждое целое число в конце концов получит один однозначно определенный номер. Да, кажется, что целых чисел вдвое больше, чем натуральных, но это неправда, на самом деле и тех, и других одинаковое количество. Мы их пересчитали (и ни одного не пропустили). Грубо говоря, целые числа можно перечислить. Все целые точки плоскости тоже можно перечислить (рис. 69).

Начинаю с точки $(0,0)$ — это будет моя 1-я точка, и дальше по спирали. И в конце концов каждая целая точка плоскости получит свой один-единственный уникальный номер. Все номера будут заняты, все целые точки плоскости будут перечислены. Представьте себе, что у вас есть комната, в которой бесконечное количество стульев, и в нее заходит бесконечное количество учеников, как понять, что это одинаковые количества?

Слушатель: Посадить учеников на стулья.

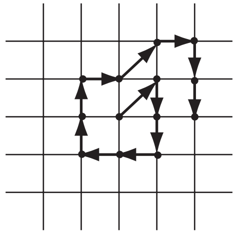

Рис. 69. Начнем с точки $(0, 0)$ и будем обходить ее постепенно расширяющимися оборотами. Каждому из узлов при этом присваивается какой-нибудь не повторяющийся номер: точке $(0, 0)$ — номер 1, точке $(1, 1)$ — номер 2, и так далее.

А.С.: И если они займут все стулья, каждый ученик сидит на одном стуле, все стулья заняты, и стоящих учеников нет, то вы констатируете тот факт, что стульев и учеников одинаковое количество.

Врезка 7. Как Кантор размышлял о «взаимно-однозначных» процессах

Выше было доказано, что учеников «ровно столько, сколько стульев» (притом и тех, и других — бесконечное количество). Но ведь тем же способом я сейчас докажу, что учеников (то бишь натуральных чисел) БОЛЬШЕ, чем стульев (то бишь целочисленных точек на плоскости). В самом деле: ученика номер 1 я вообще отправлю домой «как лишнего», на первый стул посажу ученика № 2, на второй — ученика № 3, и так далее. Итак, я доказал два взаимоисключающих факта: 1) что учеников и стульев одинаковое количество; и 2) что учеников БОЛЬШЕ, чем стульев. А захотел бы — доказал бы и что 3) стульев БОЛЬШЕ, чем учеников. Так что же, для бесконечных множеств, что ли, в принципе нельзя сказать, какое из них «больше»?!

Другой бы ученый на том и успокоился. Но гениальность Кантора позволила ему найти верную дорогу в этом мраке. Он спросил себя: а как было с этими теоремами для **конечных** множеств? Для конечных эти три теоремы несовместимы друг с другом, и любая из них может быть использована для выяснения, какое из множеств больше: учеников или стульев. А какой же из трех надо пользоваться для сравнения бесконечных множеств? Оказалось, что для бесконечных множеств надо взять за основу **способ 1**: если хоть каким-то образом удалось установить взаимно-однозначное соответствие между учениками и стульями, значит, торжественно объявляем эти два множества «равномощными» и не поддаемся ни на какие провокации типа «способа 2» или «способа 3». Только так можно построить непротиворечивое сравнение множеств по мощностям. «В наказание» за это Кантору пришлось доказать несколько труднейших теорем, которые, к сожалению, не только нельзя «по-простому» пояснить гуманитариям, но даже и у будущих математиков (студентов 2-го курса мехмата МГУ) с пониманием их доказательства возникают большие проблемы. Но хотя их трудно понять и воспроизвести, их уже нельзя «запретить» подобно тому, как пифагорейцы хотели «запретить» иррациональные числа — ведь Кантор всё обосновал строго математически, а другие с этим согласились.

Слушатель: А если у нас, допустим, две сферы, маленькая и большая?

А.С.: Как множества точек это одно и то же (то есть они равномощны). Объясню на примере окружностей (вместо сфер). Установим взаимно однозначное соответствие (рис. 70).

Школьник матkласса узнаёт всё это, скажем, в 9-м классе. И вот тут у него, как и у Кантора, возникает мысль: а может, любое бесконечное множество можно пересчитать? Тогда все бесконечные множества одинаковые. Возьмем отрезок $[0, 1]$ и пересчитаем его. Получат ли все точки отрезка номера?

Нет. И это можно формально доказать (Кантор сделал это). Пересчитать точки отрезка **невозможно**. И так как внутри отрезка заведомо уживается бесконечное число точек вида $\frac{1}{n}$, параметризуемое натуральными числами — например, множество чисел ви-

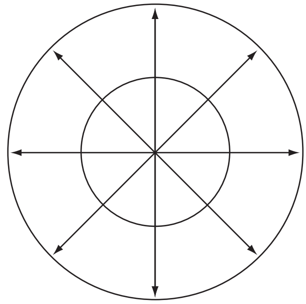

Рис. 70. Проводя лучи из общего центра двух окружностей, устанавливаем взаимно-однозначное соответствие между их точками. (Более того, оно же отвечает важному условию: близким точкам одной окружности соответствуют близкие точки другой.)

да, то мы говорим о том, что отрезок имеет как бесконечное множество большую мощность, он больше как бесконечное множество, чем множество натуральных чисел. На отрезке, на окружности, на плоскости больше точек, строго больше, чем натуральных чисел. Где-то в конце XIX века Г. Кантор понял, что *бесконечности бывают разные.*

Сейчас я докажу, что множество, любое множество (какое бы оно ни было, конечное или бесконечное), и множество его подмножеств — не одинаковы. (Второе множество ОБЯЗАТЕЛЬНО будет больше по мощности.)

Сначала возьмем конечный случай. Пусть у нас есть множество. Оно состоит (например) из трех чисел: 0, 1 и 2. Подмножество — это какая-то компания, составленная из них. Какие могут быть компании? Во-первых, может быть компания, в которой нет ни одного числа. Ну, как говорят, *пустое множество.* «Никого в нём нет» называется компания. Но математики никак не могут без этого обойтись, они просто не могут. Без нуля и без пустого множества математика не живет. Что значит «На день рождения пришло пустое подмножество гостей»? Это означает, что вы накрыли стол, и никто не явился. Математик скажет: «Ко мне на день рождения пришло пустое множество гостей». Потом, возможно, пришел только господин 0. И сразу множество перестало быть пустым!

Продолжаем «придумывать “компании”. Так сказать, *кампания по нахождению компаний* (шутка). Возможно, в гости пришел не Господин 0, а Господин 1 или Господин 2. Вот вам уже целых четыре компании: одна пустая и три из одного «человека». Эти последние могут даже побеседовать... сами с собой («с умным человеком и поговорить приятно»).

$$\emptyset \quad \text{(пустое множество)},$$
$$\{0\}, \quad \{1\}, \quad \{2\}.$$

Какие еще варианты?

$$\{0,1\}, \quad \{0,2\}, \quad \{1,2\}.$$

Все варианты перечислили?

Еще могли прийти все. Итого — 8 разных компаний.

$$\{0,1,2\}.$$

Или такая задача. Вы начальник группы. И вы хотите кого-то наградить. Сколькими способами вы можете решить эту задачу? Вы можете наградить одного, можете не награждать никого. Можете наградить двух, можете всех трех. Сколько у вас способов решить эту задачу? У вас 8 вариантов, потому что 8 подмножеств.

Так вот, ни для какого (ни конечного, ни бесконечного) множества нельзя пересчитать подмножества, используя элементы исходного множества. Подмножеств гораздо больше, чем элементов. У нас элементов всего 3, а подмножеств оказалось 8. Не хватит. Если элементов было бы 5, то подмножеств будет 32 штуки. Для конечных понятно — не пересчитаешь. Я хочу сказать, что такого не может быть ни для каких вообще множеств. Это доказал Г. Кантор.

Смотрите. Как мы могли бы доказывать теорему о том, что множество и множество его подмножеств не одинаковы.

Рассмотрим множество натуральных чисел $1, 2, 3, 4\ldots$ И множество всех подмножеств этого множества, например, все четные, или все делящиеся на 3, или все кубы чисел, начиная с тысячи, и т. д.

Используем доказательство от противного (но в несколько необычной обстановке). Предположим, что мы смогли пересчитать множество подмножеств. Подмножество четных чисел получило, скажем, номер 15. Подмножество нечетных получило номер 3. Подмножество «Все четные, начиная с десятки» получило номер 156. Числа, делящиеся на 3, как множество, получили номер 1376, отдельно взятое подмножество из чисел, которые между ста и тысячью лежат, получило номер 1000000 и т. д.

Допустим, мы пересчитали все подмножества. Приведем это допущение к противоречию.

Рассмотрим все натуральные числа, для которых «их» подмножество (то есть подмножество с таким номером) **не содержит** этого числа.

Скажем, четные числа получили номер 15, 15 — нечетное число, то есть, подмножество, ему соответствующее, его не содержит. Значит, 15 — это как раз нужное нам число.

А если, например, подмножество состоит из чисел $\{101, 102, 103, \ldots, 200\}$ и получило номер 195, оно нам не подходит, так как 195 лежит внутри своего подмножества. Значит, натуральное число 195 нам не подходит.

Далее Кантор сделал шаг к следующему этапу рассуждения. Он рассмотрел все такие числа, собрал их в кучу и обозвал это подмножеством B.

Подмножество B вполне конкретное — это все числа, которые сами не входят в подмножество с их номером. То есть 15 вошло в B, 195 — не вошло. И так далее. Этому подмножеству B тоже должен быть присвоен некий натуральный номер b. Это же подмножество. Но если каждому подмножеству присвоен номер (по нашему предположению), то такому подмножеству тоже присвоен номер. Вопрос: число b входит ли в подмножество B? С какой вероятностью вы встретите крокодила на улице (если вы не знаете вообще, что такое «крокодил»)?

Слушатели: 50 на 50.

А.С.: Да, правильно, девушки дорогие! Вот это вы правильно говорите. Либо встретите, либо не встретите. Правда? Значит, номер b либо принадлежит подмножеству B, либо не принадлежит. Сейчас я докажу, что **не может быть ни того, ни другого**. То есть сейчас я докажу, что вы не можете ни встретить крокодила, ни не встретить. Ни то, ни другое не может произойти. И это будет то самое противоречие, которое будет устанавливать тот факт, что соответствия между множеством и множеством его подмножеств не бывает. Потому что оно выведено, исходя из того, что мы смогли устроить такое соответствие.

Поехали. Я утверждаю, что «инвентарный» номер подмножества, которое состоит из таких натуральных чисел, что их собственное подмножество их не содержит, не может ни содержаться в B, ни не содержаться в B. Предположим, что номер b содержится в B. Это значит, что он не может входить в множество тех чисел, которые в своих множествах не содержатся.

Слушатель: И значит, он не содержится в множестве B.

А.С.: И значит, он не содержится в B. А теперь представьте себе, что он не содержится в B.

Слушатель: Но тогда он должен содержаться, потому что он элемент B по определению множества B.

А.С.: Да. Тогда он должен содержаться в B. То есть если он содержится, то он не содержится, а если он не содержится, то содержится. Теорема доказана методом «от противного», ибо мы пришли к чисто логическому противоречию.

Вот она, математическая логика. Добро пожаловать! Каждый 6-й логик, как говорят, сходит с ума. Это мне говорил мой учитель, он тоже математический логик, но не шестой.

Делаем дальнейший вывод — это множество подмножеств **больше**, чем само множество. (Подсказка: во множестве всех подмножеств находятся все одноэлементные подмножества.) Заманчивой является мысль, что это не только для подмножеств натурального ряда чисел справедливо, но и вообще для подмножеств ЛЮБОГО множества. Но понятие «любое множество» так вдохновило некоторых математиков, что в ход пошли совершенно ужасающие множества типа «множество всех мыслимых множеств». (Или, например, множество плохо совместимых слов «огород», «бузина», «Киев», «дядька» из известной поговорки.) И возникли крупные математические проблемы с такими множествами. Но теория Кантора выдержала это нашествие «безумных множеств». Просто пришлось внести необходимые уточнения в некоторые исходные понятия.

Вот еще один яркий образчик «безумных математических объектов». Рассмотрим некоторый шар. Например, футбольный мяч. Есть способ разбить этот шар на конечное число кусков, из которых потом можно будет составить ровно **два шара** такого же размера. То есть вы берете футбольный мяч, берете ножницы, разрезаете мяч на несколько кусков, они совершенно безумно устроенные, но все-таки куски. Потом кххх... и у вас два футбольных мяча. Всё. Математики — такие вот фокусники.

Слушатель: Такого же размера?

А.С.: Абсолютно такого же размера.

Другой Слушатель: Но это в теории возможно?

Слушатель: Только в теории и возможно. А на практике?

А.С.: А на практике ножницы должны быть устроены «неизмеримым образом», так сказать. Эти куски **не имеют объема**. Представление обычного человека о том, что любая объемная фигура имеет объем, не соответствует реальности. Далеко не у любой пространственной фигуры можно посчитать объем. Далеко не у любой плоской фигуры можно вычислить площадь. Но вы не можете себе представить такую фигуру. Их выдумали математики. Фигуры эти страшные, и они никогда не возникнут ни в какой реальности. Но в теоретических построениях они есть, и без них вот никуда. (А в процессе обучения такие «безумные» примеры позволяют лучше понять, как устроены окружающие нас РЕАЛЬНЫЕ предметы.) На прямой, например, есть объекты, у которых **нет длины**. У каждой физической теории есть ареал, в котором она применима. Механика применима для размеров порядка нас с вами, но она неприменима для размеров порядка атома, там она не работает. Там совершенно другая физика. В экономике макросистемы, которые генерируют такие вещи как инфляция, безработица и так далее, они абсурдны для множества из двух, трех человек. И мое философское мнение, может быть, оно совершенно дилетантское, что у математики тоже есть ареал, но он находится в мозгу человека. Там вселенная совершенно другая, там нет воздуха, привычной атмосферы нет. Математика тоже ограниченно применима, она не универсальна, она совершенно в другой области живет, поэтому в другой области нужно искать ограничения.

Слушатель: Как называется направление в математике, где можно разрезать шары таким невероятным образом?

А.С.: Теория меры. То, что мы называем площадью и объемом, математики называют мерой. Совершенно страшные объекты получают меру, а некоторые не получают. Это очень существенно. Не любое множество можно измерить. В этом кроются границы того, что подсказывает нам наша интуиция. Она говорит про очень простые вещи, про многоугольники, многогранники, сферы, шары. Про что-то, достаточно просто устроенное. У чего всегда можно измерить объем, площадь. Если разрезать футбольный мяч на нормальные «человеческие» куски нормальным «человеческим» ножом, то вы, конечно, никогда не получите двух футбольных мячей, просто из соображений объема. То есть идея в том, что объема у тех кусков, которые участвуют в теореме, нет. Никакого. Ни нулевого, ни положительного, никакого нет. Но когда куски эти сложат вместе, у полученного мяча может быть вполне определенный объем. («Объединение двух неизмеримых кусков может быть измеримым».)

А теперь я все-таки расскажу вам про алгоритм Евклида в геометрических терминах. Давайте возьмем дробь $\frac{3}{14}$ и превратим ее в цепную дробь:

$$\frac{3}{14} = 0 + \frac{1}{\frac{14}{3}} = 0 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 0 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

А теперь смотрите, что я делаю геометрически. Беру прямоугольник 3×14 (рис. 71).

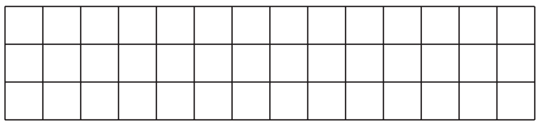

Рис. 71. Исходный прямоугольник размера 3×14.

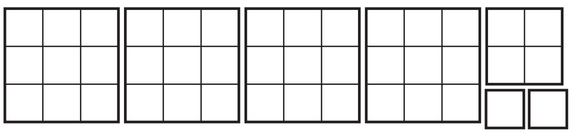

Рис. 72. Режем пирог методом Евклида.

Отрезаю от прямоугольника квадраты (рис. 72). Остается прямоугольник 2 на 3. Отрезаю от него квадрат. Остается 2 клетки. Вот они и есть наши целые части. 4 больших, 1 поменьше и 2 совсем маленьких.

Это и есть алгоритм Евклида. Такой красивый, геометрический способ.

Как показать на картинке, что рациональное число обязательно раскладывается в конечную цепную дробь? Рациональное число — это как бы прямоугольник на клетчатой сетке. Потому, что у него верх и низ целые.

Вот, скажем, $\frac{105}{13}$ — это прямоугольник 105 в ширину и 13 в высоту. 105 и 13 — это целые числа, то есть у нас целое количество квадратиков. Теперь мы начинаем наш геометрический алгоритм Евклида. Отрезаем, пока можем, огромные квадраты 13×13, проводим здесь границу — это наша целая часть. Граница идет по целым клеткам, потому что отрезали целое количество квадратиков. Оставшаяся фигура — целочисленный прямоугольник. Отрезаем квадраты от нее. Остается еще меньший прямоугольник. Понятно, что за конечное время всё будет вырезано. Каждый раз минимум один квадратик удаляется. Поэтому в какой-то момент квадратики закончатся. Теперь вспомним фокус-покус, который я провел выше с числом «корень из двух» (точнее, с числом $\sqrt{2}+1$, см. рис. 73).

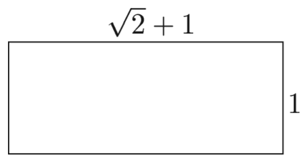

Рис. 73. Прямоугольники, да не те... Стороны их несоизмеримы.

Начинаем делать ровно то же самое. Отрезаем квадратик (рис. 74). Потому что мы ищем, сколько раз единица укладывается в «корне из двух плюс один». Она укладывается ровно два раза. Какие оказываются у этой конфигурации стороны? 1 и $\sqrt{2}-1$. Тогда прямоугольник $ABCD$ подобен $BCD'A'$.

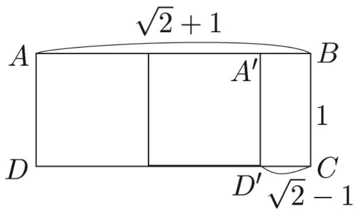

Рис. 74. На горизонтальном прямоугольнике выделены два квадрата, остался кусочек, подобный исходному прямоугольнику.

То есть если мы перевернем и увеличим $BCD'A'$ в некоторое количество раз, то получим $ABCD$. Доказательство нужно? Сейчас будет. Что такое подобие? Это — «сильная похожесть» фигур. Углы у прямоугольников одинаковые, не хватает лишь пропорциональности сторон. Анализируем, есть ли она. $1 : (\text{К} + 1)$ равно ли $(\text{К} - 1) : 1$? «Напоминаем, что К — это корень из двух».

В прошлый раз мы доказывали, что это одно и то же. Подобие имеет место. Что же произойдет дальше? Если мы начнем дальше отрезать квадратики, мы опять получим подобие, и так будет до бесконечности (рис. 75).

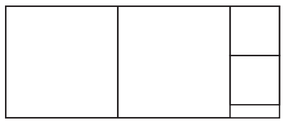

Рис. 75. «У попа была собака, он ее любил. Она съела кусок мяса, он ее убил — в землю закопал, камень положил. На камне написал: "У попа была собака..." и так далее до бесконечности».

Теорема доказана. Из-за подобия мы будем эту операцию бесконечное количество раз проделывать, а значит, ни на какой сетке наш прямоугольник размеров $(\sqrt{2} + 1) \times 1$ не может лежать — и, следовательно, $\sqrt{2} + 1$ не будет рациональным числом.

Что-то это мне напоминает... В детстве у меня была книга. Она называется «Вот так история!». Там был мальчик. Он ужасно себя вел. Все были воспитанные, а он был невоспитанный. И вот этого мальчика отправили в невоспитанный город, где у него сразу старик отнял кровать, выгнал его, стал спать в этой кровати. Потом на его подушке выросло невоспитанное дерево, мальчика разбудило. Его все стали обижать, на улице все толкались, и он попросился обратно. Просто детский триллер, да и только. На обложке этой книги, однако, была изображена нетривиальная картина.

Я на нее гляжу, гляжу... Это был момент, когда мой папа понял, что я математик. Я сам тогда ничего не понял, я был совсем маленьким. Я просто посмотрел на картину, на которой сидит дедушка и читает внуку эту книгу. А теперь представьте на секунду, что это означает? Это значит, что на маленькой книжке на картинке изображены дедушка и внук, и у дедушки в руках та же книга, на которой изображены дедушка и внук. Я говорю: «Папа,

Рис. 76. На обложке книги сидел дед. Рядом сидели внуки. Дед держал такую же книгу, как исходная, но поменьше. А на ее обложке сидел дед (поменьше), внуки (поменьше), дед держал книгу (еще меньше). А на обложке дед (еще меньше...), и так далее.

так это... Это же до бесконечности повторяется! Это же повтор, а значит, это должно быть до бесконечности, да?» В прямоугольниках (рис. 75) — то же самое.

С этим связана еще одна интересная задача. Есть две карты города, разного масштаба. Одна карманная, другая — большая настенная карта. Предположим, что кто-то взял, сорвал со стены большую карту и кинул на нее маленькую. (Карты подобны по форме) (см. рис. 77).

Доказать, что можно взять иголку и проткнуть эти две карты в одной и той же точке изображаемого ими города.

Это вроде как игра. Я беру вот эти две карты и думаю, как бы мне положить верхнюю на нижнюю, а вы приходите и иглой протыкаете, где захотите; если вы проткнули иглой одну и ту же точку (дом 37 по улице Профсоюзной), значит, вы выиграли, а если нет, то выиграл я. Теорема утверждает, что в этой игре проигрывает тот, кто кладет карту. То есть, как бы ни положить карты, всегда можно указать нужную точку.

Доказательство — в одну строчку. Методом «взгляни — и поймешь».

Рис. 77. Ничто не предвещало появления Ее величества Бесконечности...

Нарисуем на маленькой карте ту территорию местности, которую на большой карте закрыла маленькая карта.

Теперь нарисуем на нарисованной карте ту территорию, которую она занимает на маленькой (рис. 78).

Рис. 78. И завертелись карты города аж до бесконечности!

Дальше они будут вертеться до бесконечности, но в пересечении всех этих карт будет точка. В нее и надо воткнуть иголку.

А теперь немножко сложнее: я беру две абсолютно одинаковые карты города. Верхнюю снимаю, сжимаю, комкаю, складываю, но не рву. Теперь кидаю на оставшуюся лежать карту так, чтобы верхняя не вылезла за пределы нижней (рис. 79).

Рис. 79. Иллюстрация к теореме Брауэра.

Теорема. Всё равно можно проткнуть иголкой эти две карты в одном месте. Всегда, что бы вы ни делали (единственное только — нельзя резать и рвать). Если вы карту порвали, то можно добиться того, чтобы проткнуть было негде. А вот если мы не рвали, то всегда найдется общая точка, иногда их будет несколько, но одна найдется обязательно. При условии, что смятая до неузнаваемости (и сплющенная) верхняя карта целиком лежит на нижней. Эта теорема очень эффектна. На самом деле, она утверждает нечто про произвольное непрерывное отображение объекта в себя. Эта теорема не очень простая, я ее рассказываю на курсе «математика для экономистов» и в школе анализа данных Яндекса. Называется она *Теорема Брауэра.*

На самом деле, пока она не была доказана, в нее не очень верили. Любое непрерывное отображение (разрешено всё, кроме разрывания) замкнутого выпуклого объекта (в теореме Брауэра говорится о замкнутом шаре) в себя всегда обладает неподвижной точкой. То есть точкой, которая никуда ни сдвинулась. Вы что-то растягиваете, что-то сжимаете, что-то складываете, но вы никогда, никогда не добьетесь того, чтобы *все* точки изменили свое положение. Этого *нельзя* сделать. Этому есть математическое препятствие, и оно называется «теорема Брауэра о неподвижной точке».

* * *

Вернемся к задаче, которой мы закончили предыдущую лекцию.

$$(1+\sqrt{2})^2,\ (1+\sqrt{2})^3,\ \dots\ (1+\sqrt{2})^n$$

— эти вот выражения почему-то тоже помогали нам решать уравнение Пелля.

Сейчас как раз самое время открыть секрет. Заодно получим еще одно оправдание изучению уравнения Пелля:

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Греки мыслили геометрическими образами. Старались увидеть число, увидеть теорему Пифагора. У них были «квадратные» и «треугольные» числа.

Например, 4 или 9 — это квадратные числа (рис. 80).

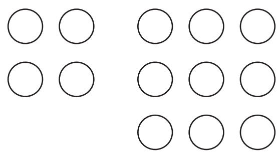

Рис. 80. Из 4 или из 9 кружков можно сложить квадрат.

Что такое треугольное число? Это когда из такого количества кружочков можно треугольник собрать. 3, 6, 10 — числа треугольные (см. рис. 81).

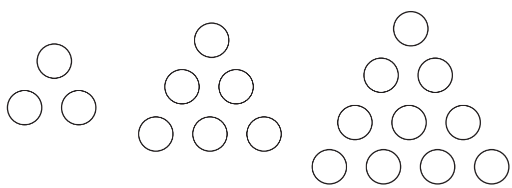

Рис. 81. Перед началом партии в биллиард шары укладывают в «треугольник».

Следующее 15, потом 21. Каждый раз прибавляем на 1 больше, чем в предыдущий раз.

Сам собой возникает вопрос: *бывает ли так, что одно и то же число и квадратное, и треугольное?* То есть количество фишек таково, что можно собрать из них квадратик, а можно перемешать и собрать треугольник.

Слушатель: Число 1 и такое, и такое.

А.С.: Безусловно. Человек, который говорит «число 1», обладает математическим мышлением. Не пропустить даже простейшего случая. Это очень важно.

Однажды я ехал в поезде из Иркутска в город Тулун. И со мной в плацкарте ехала женщина с дочкой лет пяти. Мама явно не математик, но при этом хочет дочку чему-то научить. И она спрашивает: «Вот, смотри. У тебя пять кукол. Как их можно разложить? 3 и 2». — «Ну, да». — «А еще можно как-нибудь?» Я с интересом наблюдаю. Тут дочка и говорит: «Можно $5 + 0$».

Я вскакиваю с полки, спускаюсь и говорю: «Ваша дочь имеет нетривиальные, очень хорошие математические способности».

Мама немножко помолчала, а потом согласилась. Но она не поняла. Ведь назвать $5 + 0$ может только человек, у которого четко развита логика, другой человек не назовет, это нетривиальный вариант.

Вернемся к треугольным и квадратным числам. Какое следующее, после 1? Следующее «и такое, и такое» число — это 36 (см. рис. 82).

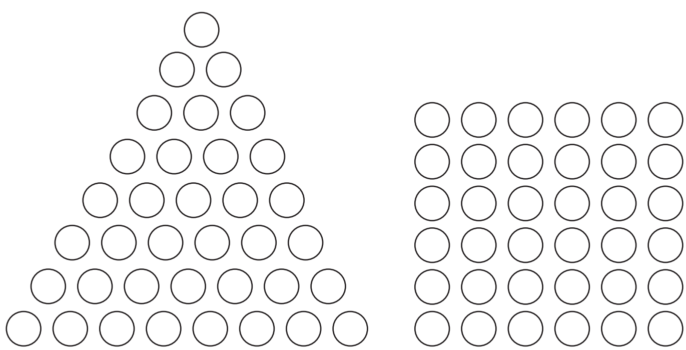

Рис. 82. Число 36 — «дважды чемпион» среди натуральных чисел.

Давайте найдем общую формулу для всех чисел такого рода.

Слушатель: 36 на 6, ну, 36 на 36 умножить?

А.С.: Давайте, во-первых, выведем формулу для треугольных чисел. То есть, грубо говоря, есть формула для всех квадратных: n^2. Подставляете любое число, получается квадрат. А вот как написать общую формулу для чисел 1, 3, 6, 10, 15... Вот что нужно сделать с m, чтобы получить треугольное число?

Что получается? $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + m$.

Нужно посчитать такую сумму. Вот оно, треугольное число. Как посчитать такую сумму? Есть знаменитая история про то, как Гаусс быстро в уме подсчитал сумму первых подряд идущих ста чисел. (Но это, мне кажется, байка.) Маленький Гаусс учился в школе в 3-м классе. В школе к учителю или к учительнице пришел знакомый. Учительница решила дать задачу такую, чтобы дети занялись на весь урок. «Дети, а теперь посчитайте $1+2+3+$ и так далее до 100». И ушла довольная. Выбегает маленький Гаусс через 5 минут, говорит: «Я посчитал: 5050».

«А как ты посчитал? А ты можешь доказать?» — «Ну конечно, могу. Смотрите. Я пишу две строки:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100,$$
$$100 + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

По-другому просто перенумеровал. Сумма внизу та же самая будет. Пусть она равна x. И сверху x и снизу x.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = x,$$
$$100 + \ldots + 3 + 2 + 1 = x».$$

Давайте теперь сложим строчки по столбикам: $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, ...

Слушатель: Всегда получится 101.

А.С.: Конечно. А сколько штук?

Слушатель: 100.

А.С.: 100. Значит, удвоенное значение нашего выражения равно 101 умножить на 100. Откуда после сокращения на 2, естественно, и получается x равно 50 умножить на 101.

$$2x = 10100,$$

отсюда

$$x = 5050.$$

Вот Гаусс и сказал 5050. И был совершенно прав, ничего не считая. Математика — это искусство лени. Математик — это тот, кто никогда не будет делать рутинных действий, он всегда придумает что-то машинное. Вот вы познали какой-то рутинный метод. Всё. Вы теперь на нём не зацикливаетесь, на нём будет зацикливаться компьютер. Компьютер ничего не выдумает, а математик, он свалит на компьютер всю рутину и найдет закономерность. В Брауншвейге Гауссу стоит памятник: бронзовый 17-угольник, на котором стоит математик. А почему он стоит на 17-угольнике? Потому что Гаусс придумал, как строить правильный 17-угольник циркулем и линейкой. «Правильный» — значит с равными сторонами и углами.

До него эту задачу не могли решить. Можно построить правильный треугольник, 4-угольник. На самом деле, если вы умеете строить многоугольник с простыми сторонами, то остальное легко. То есть надо строить: правильный треугольник, 5-угольник, 7-угольник. А 7-угольник никто строить не умеет. Все мучились и думали: «Что ж такое? Какие-то мы глупые, наверное. Почему мы не можем построить правильный 7-угольник циркулем и линейкой?»

А потом уже после Гаусса пришел Ванцель и сказал: «Это невозможно. Математически невозможно». И доказал это. Так же, как нельзя построить правильный 11- и 13-угольник. Помните, я рассказывал про теорему Галуа? Про то, что для уравнения выше 4-й степени нельзя написать общую формулу корней. Здесь та же ситуация, вы можете взять циркуль и линейку, вооружиться ими и хоть всю жизнь строить какие-то дуги, что-то пересекать, но вы никогда не сможете построить правильный 7-угольник. Ванцель доказал это в 1836 году. Но еще значительно раньше девятнадцатилетний Гаусс сумел построить правильный 17-угольник. Какая следующая фигура строится циркулем и линейкой из правильных многоугольников? После 17-угольника? Оказывается, 257-угольник. Это очень долго и сложно, но можно.

Вернемся к треугольным числам.

Понятно теперь, как мы будем выводить общую формулу? Мы запишем всё наоборот. Мы здесь запишем

$$
\begin{gathered}
1+2+3+4+\ldots+m=x, \\
m+(m-1)+(m-2)+\ldots+1=x.
\end{gathered}
$$

Теперь сложим и получим m экземпляров какого числа? Числа $(m+1)$:

$$(m+1)m=2x.$$

Поэтому формула вот такая:

$$x=\frac{m(m+1)}{2}.$$

Теперь можно подставлять вместо m любые натуральные числа и получать треугольные.

А вот теперь задается вопрос. Итак, число является треугольным, значит оно имеет такой вид

$$\frac{m(m+1)}{2}.$$

С другой стороны, оно квадратное, то есть имеет вид: n^2.

Получается замечательное уравнение для решения в целых числах

$$m(m+1)/2=n^2.$$

А теперь смотрите? Может быть, вы помните, что такое *делители* числа? Делитель числа a — это такое число, на которое a делится (без остатка).

m и $(m+1)$ — два соседних числа. Значит, одно из них точно четное, а значит, делится на 2. Значит $m(m+1)/2$ — произведение двух целых чисел. Четное поделится на 2, а нечетное не поделится. Важно так же, что у соседних чисел не может быть общих делителей.

15 делится на 3, 16 нет. На 3 делится каждое третье число.

16 делится на 2 и на 4, но на 3 не делится.

Слушатель: А единица?

А.С.: Да. Единица. Но единицу мы за делитель не считаем, на нее всё делится. Еще пример. 28 делится на 7. Следующее число, которое делится на 7 — 35, а предыдущее — 21. Значит 27 на 7 не делится. То есть m и $(m+1)$ точно не имеют общих делителей.

В другой части нашего уравнения написан квадрат: n^2.

Его можно разложить на простые множители. И каждый такой множитель будет входить в разложение n^2 в четной степени. Например, если n делится на 5, то n^2 делится на 5^2.

Значит, чтобы выполнялось наше равенство, $m(m+1)/2$ тоже должно делиться на 5^2. То есть на 25. Но m и $(m+1)$ не имеют общих делителей, значит одно из них делится сразу на 5^2.

И это будет верно для каждого простого делителя числа n. Иными словами наше равенство возможно, только если каждый из m и $(m+1)$ является квадратом*.

Я, между прочим, в этой лекции обошел одну тонкость, которая называется ***основная теорема арифметики***. В школе ее тоже обходят. Звучит она так: *любое число однозначным образом раскладывается на простые множители.* Школьников обманывают, говорят: «Ну, это очевидно». Действительно очевидно — если вы посидите, как я, и пораскладываете все числа от одного до 1000 на множители, то вы, конечно, убедитесь в этом. Но к абсолютному доказательству такая очевидность отношения не имеет.

Если же поверить в эту теорему, то получается следующее. Если n делится, скажем, на 11, то n^2 делится на 11^2, на 121. Значит,

---

*Этот переход «скомкан» и вовсе неочевиден. Подробнее речь об этом пойдет во второй части книги.

и $m(m+1)$ делится на 11^2. Но 11 не может входить и в m, и в $(m+1)$. Либо m делится на 11 в квадрате, либо $(m+1)$ делится на 11 в квадрате.

Эта важная истина говорит о том, что если $m(m+1)/2 = n^2$, то либо $m = a^2$ и $(m+1)/2 = b^2$ в случае если m — нечетное, а $(m+1)$ — четное, либо наоборот $m+1 = b^2$ и $m/2 = a^2$ (если наоборот).

Отсюда уже один шаг до уравнения Пелля $x^2 - 2y^2 = 1$.

В первом случае получаем:

$$m = a^2 \quad \text{и} \quad (m+1)/2 = b^2 \Rightarrow m+1 = 2b^2,$$

а так как m и $m+1$ соседние числа, то $a^2 - 2b^2 = -1$.

Во втором случае получаем:

$$m+1 = b^2 \quad \text{и} \quad m/2 = a^2 \Rightarrow m = 2a^2 \Rightarrow b^2 - 2a^2 = 1.$$

Оба раза мы пришли к уравнению Пелля $x^2 - 2y^2 = \pm 1$.

То есть, решая это уравнение, мы будем получать **квадратно-треугольные** числа.

Ребенок, который играет в эти кружочки и хочет составить одновременно квадратное и треугольное число, вынужден решать уравнение Пелля.

Давайте посмотрим. Какие у нас были решения? 41 и 29.

$$41^2 - 2 \cdot 29^2 = -1.$$

Следовательно

$$(m+1)/2 = 29^2, \quad m = 41^2, \quad n^2 = 29^2 41^2, \quad n = 1189.$$

Кто бы мог подумать, что когда-нибудь мальчик выложит такой треугольник. В нём должна быть 1681 строка. Представляете, какую площадь займет этот треугольник!

Но я всё ухожу от ответа про $(\sqrt{2}+1)^2$, хотя и обещал его вам.

Итак. Почему же, независимо от степени, у нас всегда получалось решение уравнения

$$x^2 - 2y^2 = 1?$$

Возвожу, например, в 4-ю степень. (На самом деле, можно возвести в любую.)

$$(1+\sqrt{2})^4 = (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}),$$
$$(1-\sqrt{2})^4 = (1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2}).$$

Это классический бином Ньютона. Чтобы раскрыть все эти скобки, нам нужно каждый раз из каждой скобки взять либо $\sqrt{2}$, либо 1. Представьте себе, какие из этих операций дадут целое число, а какие будут давать *число с корнем из двух*. Во-первых, целое получается, если я отовсюду взял единичку. С другой стороны, если я из 2 скобок взял корень из двух, а из 2 единичку, тоже будет целое. Если я из 4 скобок возьму $\sqrt{2}$ — тоже целое. А вот если из 3 скобок взять или из одной, то получится число с корнем. И после того, как я сложу, у меня получится выражение вида $m + n\sqrt{2}$.

В m сидят все способы раскрытия скобки, где я беру с корнем четное число скобок, а все остальные разы единичку. А в n — все, в которых я взял с корнем нечетное количество скобок, а из остальных — единичку.

А теперь посмотрим на скобку с минусом. Получится то же самое, за одним исключением. Когда я возьму $\sqrt{2}$ нечетное число раз, у меня получится число с минусом. Таким образом, при перемножении получается знак минус ровно у тех слагаемых, которые кратны $\sqrt{2}$. Поэтому после того, как мы всё сложим, у нас получится $m - n\sqrt{2}$

$$m + n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}),$$
$$m - n\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2}).$$

А теперь давайте перемножим две наши строчки.

$$(m + n\sqrt{2})(m - n\sqrt{2}) = m^2 - 2n^2.$$

Напоминает Уравнение Пелля, не правда ли?

Наконец, перемножим правые стороны уравнений. Я не зря вам тут про Гаусса рассказывал. От перестановки множителей ведь ничего не меняется. Поэтому я могу в моем произведении перемножать скобки в любом порядке. Перемножу их по столбцам:

$$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1-2 = -1.$$

Ну и тогда у нас получается после перемножения по столбцам

$$\begin{gathered}(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}),\\(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2}),\end{gathered}$$

в ответе $(-1)(-1)(-1)(-1)$.

А что получится, если (-1) умножается на себя много раз? 1 или (-1). То есть, когда мы будем возводить $(1+\sqrt{2})$ в *четную* степень, будет $(+1)$, а в *нечетную* (-1).

Но с другой стороны уравнения у нас стояло m^2-2n^2. Получаем $m^2-2n^2 = \pm 1$.

То есть мы доказали, что в любой степени $(1+\sqrt{2})^n$ порождает решение нашего уравнения Пелля.

Теперь **несколько вопросов** до следующей лекции.

* * *

1. Вы залезли на вершину Хибинских гор. Высота их примерно 1 км. И посмотрели вдаль. А там — дома. Вам померещилось, или это Мурманск? Могли ли вы увидеть Мурманск? На сколько километров вдаль можно увидеть с километровой горы? Обратите внимание, земля круглая, поэтому сильно далеко не увидишь. На сколько километров видно с Эвереста? С 20-этажного дома? Если кто-нибудь, например, говорит: «Я тут пролетал из Тбилиси в Дели и Москву на горизонте видел». Он врет или возможно такое? Это задача, которая возникает, когда вы идете в горы.

2. Вы стали астрономом. И наблюдали за звездами. Наблюдали, живя в городе Москве, а потом по семейным обстоятельствам перебрались в Санкт-Петербург. Вы обнаружили какие-нибудь новые звезды, которые из Москвы не видно? Как устроены между собой два множества звезд этих двух городов? (Множество звезд, которые видны из Петербурга, и множество звезд, которые видны

из Москвы.) Случилось солнечное затмение. Летним днем в Москве стали видны звезды, которые никогда не видны летним днем в Москве. Это — новые звезды, например, «Южный крест», или это те звезды, которые вы уже видели над Москвой?

3. Вы идете на лыжах 22 марта. Начинает темнеть, и вы вспоминаете, что 22 декабря, когда вы шли на лыжах, и солнце зашло за горизонт, вы успели добежать до деревни Морозки до полной темноты. Вы идете в том же самом месте. Успеете ли вы добежать до деревни Морозки или нет? Тот же вопрос про 22 июня и 22 сентября (но уже вряд ли на лыжах). Когда быстрее всего наступает темнота после захода солнца, когда медленнее?

4. Вы подошли с вашей маленькой двухлетней дочкой к детской площадке. И обнаружили там некоторое количество качелей разного вида.

Картинка: качели, рассчитанные на двоих детей. Одни с ручкой для рук (см. рис. 83), другие с ручкой для ног (см. рис. 84). А также совсем простые качели в виде обычной доски (см. рис. 85).

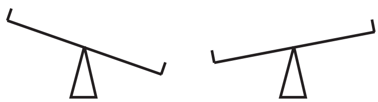

Рис. 83. Качели с ручками для рук.

Рис. 84. Качели с ручками для ног.

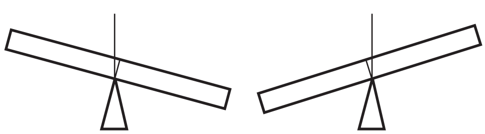

Рис. 85. Качели без ручек — в виде обычной доски.

Какие качели в порядке (то есть в горизонтальном состоянии), а какие качели вы увидели, скорее всего, в перекошенном состоянии? Как это зависит от расположения спинки?

Вы опять пришли и увидели, что качели устроены как абсолютно плоская доска. Просто обтесанное с двух сторон бревно, и больше ничего. Но одни качели в положении равновесия висят, вторые всё время скатываются набок. Почему?

5. Алиса летит сквозь Землю. Помните сюжет книги Л. Кэррола «Алиса в стране чудес»?

Алиса летит сквозь Землю и думает, что она к антиподам прилетит. В самом центре Земли выбегает гномик и дает ей пинок так, что увеличивает скорость ее полета на 1 метр в секунду. Вопрос: на какое расстояние она вылетит из Земли вверх благодаря этому дополнительному метру в секунду?

6. В лиге чемпионов в группе 4 команды. Они играют каждая с каждой. Причем каждая с каждой играет и у себя, и в гостях. То есть в каждой группе между каждой парой команд произойдет ровно 2 матча. В случае ничьей каждой команде дают 1 очко. Тот, кто победил, получает 3 очка. Проигравший — ноль очков. А теперь — внимание! С каким минимальным количеством очков еще можно попасть в следующий раунд? В следующий раунд попадают 2 команды из 4. Вы должны привести конкретный расклад. Кто с кем играл, какие баллы получил. И доказать, что с меньшим числом очков «выйти из группы нельзя».

7. Каково максимально возможное количество родных прапрабабушек?

Обсуждение ответов — на лекции 5.

Лекция 5

А.С.: Сначала обсудим задачи, заданные на дом в конце лекции 4. Они не являются обязательными и ничего не проверяют (в отличие от ЕГЭ). Просто они показывают особенности математического подхода в различных жизненных ситуациях. Всего задач было семь: 1) Обзор окрестностей с вершины горы; 2) Наблюдение московских звезд во время затмения; 3) Скорость наступления темноты в различные дни года; 4) Странное поведение детских качелей; 5) Полет девочки Алисы к антиподам; 6) Математика футбольного чемпионата; 7) А сколько у человека прапрабабушек?

Все разобрались, сколько у «среднего человека» прапрабабушек? (Несредним человеком будем называть такого, у которого две прапрабабушки (или два прадедушки) совпадают в одном лице. Всякое бывает. Например, изучение росписи русских дворянских родов приводит к выводу, что у А.С. Пушкина и Н. А. Романова (то бишь Николая I) были общие предки.)

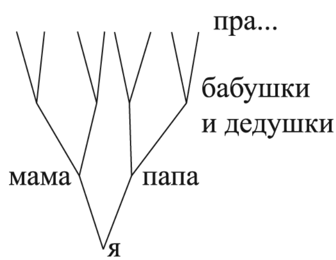

Рис. 86. «Дерево» бабушек и прабабушек.

С каждым коленом удваивается количество как дедушек, так и бабушек (см. рис. 86). Папа один, мама одна, дедушек два, бабушек две, прадедушек уже четыре, и прабабушек тоже четыре, ну, а прапрабабушек, соответственно, получается восемь.

Теперь разберем задачу про футбол (рис. 87).

С каким минимальным количеством баллов можно выйти из группы в следующий раунд? Ниже приведен пример, когда это количество равно четырем (рис. 87, справа).

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

	A	B	C	D
A		2:1	2:0	1:0
B	0:3		2:2	0:0
C	2:5	3:3		1:1
D	1:4	0:0	1:1	

Рис. 87. Слева: Матчи команд самих с собой не имеют смысла. Справа: финальные счета в матчах, где A всех победил, в то время как прочие игры сыграны вничью.

Итак. «A» выигрывает все игры. Все остальные матчи сыграны вничью. (Напомним, что за победу дается 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0.)

Получается, что выходит из группы в следующий раунд лучшая команда «A» и еще одна из команд с 4 баллами. Я не знаю, было ли такое в лиге чемпионов, но с 6 баллами точно выходили.

Встает другой вопрос. Как доказать, что с 3 баллами выйти *нельзя*? Конечно, можно было бы перебрать все 3^{12} вариантов розыгрышей матчей (ибо имеется 12 незаполненных мест, и на каждом месте может быть 3 различных исхода). Но хотелось бы этого избежать. Давайте попробуем формально рассуждать. Как мы будем это делать? От противного. Предположим, что какая-то команда вышла с 3 баллами. Какие в этом случае количества баллов могут быть у всех команд? Вышеуказанный вариант для команд A, B, C, D был 18, 4, 4, 4. Если какая-то команда вышла в следующий раунд с 3 баллами, значит, как минимум у двух команд должно быть тоже не больше 3 баллов. Потому что иначе наша команда не вышла бы из группы. Раз она вышла, следовательно, у двух других команд баллов меньше или равно 3.

Вопрос: сколько баллов у команды, которая больше всех набрала?

В каждом матче разыгрывается суммарно или 2, или 3 балла (ничья дает $1+1$, победа дает $3+0$). Поэтому за все матчи все команды могут набрать минимум $2 \cdot 12 = 24$ балла, если все сыграли вничью, максимум — $3 \cdot 12 = 36$, если каждый матч был выигран.

В нашей ситуации три команды набрали не более, чем по 3 балла, в сумме 9, значит у четвертой команды не меньше $24 - 9 = 15$ баллов.

Значит, она выиграла почти все матчи.

Давайте уточним, как команда могла набрать 3 балла. Она либо три раза сыграла вничью, либо один раз выиграла. Больше способов нет. Одна победа и 5 проигрышей, либо 3 ничьих и 3 проигрыша. Обозначим это так:

Вариант 1. $+ - - - - -$

либо

Вариант 2. $0\ 0\ 0 - - -$

Слушатель: Это значит, что 18 очков в розыгрыше.

А.С.: Рассмотрим вариант 1. В 6 матчах было разыграно 18 очков, значит, в оставшихся 6 матчах будет не менее 12 баллов, так как в каждом матче разыгрывается не менее 2 баллов. Значит, в сумме получается не меньше 30 баллов. Значит, у четвертой команды не менее $30-9 = 21$, чего быть не может, так как максимальный результат любой команды равен 18, то есть все выигранные матчи.

Итак, вариант с одним выигрышем отпадает. Рассмотрим другой вариант: три ничьи.

Вариант 2. Четвертая команда набрала не меньше 15 баллов (минимальное количество 24, три команды набрали в сумме 9, получаем $24 - 9 = 15$). Значит, она одержала минимум 5 побед. (Меньше не может быть, так как всего 6 матчей. Даже если 4 победы и 2 ничьи, получится $4 \cdot 3 + 2 < 15$).

Получается минимум, который команды могли набрать вместе: не 24, а 29 (ибо пять матчей с победами принесли 15 очков, а остальные 7 матчей — не меньше 14 очков). Значит у четвертой команды минимум $29-9=20$ баллов. $20>18$, где 18 — максимально возможное количество баллов. Противоречие.

Другой вопрос, так сказать, «обратный» к первому. С каким максимальным количеством очков можно *не выйти* из группы в следующий раунд?

Слушатель: 12.

А.С.: Да. И как должна быть устроена таблица? Одна команда (скажем, команда D) всем проиграла — 0 очков. Остальные 3 команды выигрывали по кругу: A у B, B у C, C у A. Тогда у трех команд будет по 12 очков. И одна из них должна будет покинуть чемпионат.

Почему *нельзя не выйти* в следующий этап с 13 очками? Предположим, что вы набрали 13 или больше очков, почему вы точно знаете, что вы вышли в следующий этап?

Подсказка. Если бы кто-то с 13 баллами не вышел, то две команды, которые вышли, имели бы не меньше, чем 13.

Теперь поговорим о том, с какой горы на сколько километров видно.

Я залез на Хибинские горы, могу ли я видеть Мурманск, который находится на расстоянии 100 км от гор? Ответ: на самом горизонте — смогу (если сопки около Мурманска не помешают).

Сейчас мы получим точную формулу для максимальной видимости.

Уже первые шаги вверх от земли сразу дают очень большую видимость.

С поверхности ничего не видно. Ноль, он и есть ноль. Горизонт стянулся в точку. Чуть-чуть выше нуля поднялись, на 10 сантиметров, и сразу видно примерно на километр (это если Земля — идеальный шар). Обозначим высоту горы за h. Расстояние до центра земли обозначим за $R \approx 6400$ км. Эта числовая величина нам также пригодится, когда мы будем решать задачу про Алису.

Посмотрим на рис. 88. Я хочу знать, чему равно L, то есть на сколько километров видно? Здесь есть одна тонкость.

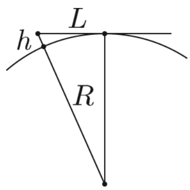

Рис. 88. Земля в разрезе. Расстояние от центра до вершины горы $R+h$, расстояние от центра до точки касания R. Через L обозначено расстояние от вершины до точки касания.

Вдали будет горизонт. А вот если с другой стороны (за горизонтом) имеется такая же гора высоты h, то ее видно вдвое дальше. А если там гора высоты $\frac{h}{2}$, то всё равно гораздо дальше, чем просто до горизонта (рис. 89).

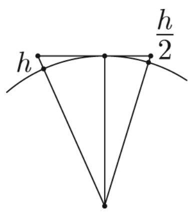

Рис. 89. «Взгляд за горизонт».

Один раз при мне на Байкале видный ученый совершил детскую ошибку. Он сказал: «Мы никак не можем видеть горы, которые находятся в районе Улан-Удэ. Не можем, потому что...» — и дальше привел вычисления по формуле, которую мы сейчас выведем. Я говорю: «Ты не учитываешь, что мы сами сейчас не на Байкале, а на сильном возвышении». — «О...», — говорит: «Конечно, это всё удваивает». На Байкале очень здорово наблюдать, что Земля круглая. Племена, которые жили на Байкале, наверняка издавна знали, что Земля круглая.

Помните теорему Пифагора? У нас образуется прямоугольный треугольник с гипотенузой $R+h$ и катетами R и L. Значит,

$$(R+h)^2 = R^2 + L^2.$$

Теперь раскроем скобки:

$$R^2 + 2Rh + h^2 = R^2 + L^2.$$

Страшная величина (квадрат радиуса Земли) сокращается, и остается:

$$L^2 = h^2 + 2Rh.$$

Здесь нужно быть не только математиком, но и физиком — для того, чтобы сказать, что h^2, в общем-то, равно нулю.

Потому что по сравнению с двойным радиусом земли h^2 — очень маленькое число. Это — вещи несопоставимые, в том смысле, что первая подавляюще больше, чем вторая. Поэтому, чтобы без лишних усилий *оценить*, на сколько километров видно, достаточно положить $h^2 = 0$ и написать:

$$L = \sqrt{2Rh}.$$

Что здесь важно понимать? Что $2R$ — величина постоянная, корень из нее равен 113. А если совсем грубо — то просто 100.

Есть такая оценочная формула:

$$L = 100\sqrt{h},$$

$\sqrt{h}$ — эта функция, которая сначала очень быстро возрастает, а после отхода от нуля увеличивается медленно (см. рис. 90).

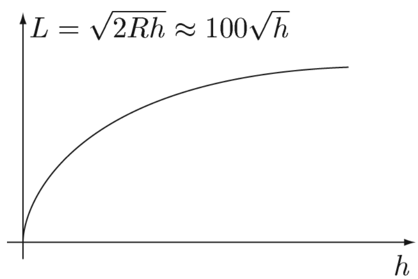

Рис. 90. «О! Уже хорошо видно! А наших лыж что-то не видно...»

Чуть-чуть h отлично от нуля, прямо самую малость, а корень уже очень большой. Поэтому и получается, что вы чуть-чуть подняли голову от Земли и: «О! Уже хорошо видно!» Давайте немного покрутим эту формулу.

Вот при $h = 1$ км с Хибин видно на 100 км, а более точный результат — действительно — на 113 километров. 113 километров вполне достаточно, чтобы увидеть Мурманск с Хибинских гор.

Слушатель: То есть на один градус, а точнее, на 1,0128 градуса.

А.С.: Да, на один градус. С километра видно на 1 градус.

Другой слушатель: Вы схалтурили.

А.С.: Где?

Слушатель: Расстояние между Хибинами и Мурманском. Вы считаете по прямой. А на самом деле надо считать длину дуги.

А.С.: Да. Разница будет примерно одна сотая процента. Она почти равна нулю.

Слушатель: А при Джомолунгме?

А.С.: Будет примерно 10 или 15 метров*. Давайте еще что-нибудь пощупаем. Джомолунгма, какая высота?

Слушатель: 8848 метров.

А.С.: Да. 8848. Округлим до 9 километров.

$$h = 9, \quad L = 300.$$

Заметьте, что вершина Джомолунгмы — это то, на какой высоте летит самолет, поэтому с самолета вы видите примерно на 300–350 километров. Если лететь из Петербурга в Москву, то, чисто теоретически, пролетая Бологое, можно увидеть и Москву, и Санкт-Петербург, правда, для этого самолет должен развернуться. Но если кто-то говорит, что он видел Ташкент, летя из Москвы в Питер, он вас обманывает.

---

*Возможно, уже в районе ста метров, я не прикидывал. Прикиньте сами в качестве упражнения!

Когда вы летите на «гагаринской высоте», на высоте 100 км, соответственно, вы видите на 1000 километров. С 40-метровой вышки видно на 20 километров. Что, конечно, довольно много.

А вышка в 10 метров даст обзор на 10 километров во все стороны. Вышка уменьшилась в 4 раза, а обзор в 2. Если увеличить вышку в 9 раз, обзор увеличится в 3 раза. Обратите внимание, не линейная зависимость, а корневая.

Переходим к Алисе.

Это — пример того, как не работает наша интуиция. Вот она иногда работает, а иногда... Сейчас я вам расскажу чисто физическую вещь. Итак, давайте сделаем следующее.

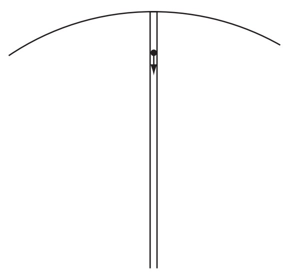

Рис. 91. Алиса начинает падать в шахту. Но вы не волнуйтесь, она не погибнет. Шахта ровная, проходит всю Землю насквозь, Земля не раскаленная внутри, а саму Алису можно считать материальной точкой массы 40 кг. Ее уже ждут на той стороне американские ребята! А от ее массы в этой задаче вообще ничего не зависит.

Что происходит? Алиса падает (рис. 91). У нее меняется скорость. С какой скоростью меняется ее скорость? То есть какое у Алисы *ускорение*? Оно в первые моменты равно ускорению свободного падения g; оно, грубо говоря, такое: $g \approx 10$ м/с^2 (точнее, 9,81).

То есть за одну секунду полета падающий человек увеличивает скорость на 10 м/с каждую секунду.

Слушатель: А у нее юбки парусят, это никак не влияет?

А.С.: Влияет. Поэтому пусть не парусят.

Слушатель: В вакууме...

А.С.: Да, это вакуумная Алиса. Потому что если есть сопротивление воздуха, то на некоторой скорости прекращается всякий рост скорости (например, для парашютиста, падающего без парашюта, скорость быстро стабилизируется на значении примерно 50 м/с). Вот. Поэтому пусть у нашей Алисы не парусят. И вообще... она ведь бросилась в шахту вниз головой, чтобы удобнее было вылетать из нее на другой стороне Земли.

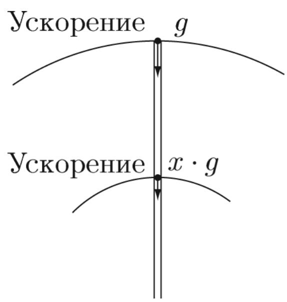

Рис. 92. А если отважная Алиса летит не сквозь Землю, а сквозь Юпитер? У него радиус в 11,2 раза больше земного. И она уже пролетела до глубины в 2,2 земных радиуса. Тогда всю массу Юпитера можно поделить на две части: внутренний шар радиуса 9 (земных радиусов) и наружный шаровой слой толщины в 2,2 (земных радиуса). Точный математический подсчет показывает, что суммарная сила, с которой шаровой слой притягивает к себе летящую Алису (да вы мне всё равно ведь не поверите!..) РАВНА НУЛЮ. А внутренний шар, через который Алисе осталось пролететь, притягивает ее к себе так же, как притягивала бы её к себе точка, равная массе этого шара и находящаяся в центре шара.

Но есть одна важная физическая тонкость. Проблема в том, что когда вы начинаете падать в такого рода «колодец», у вас g начинает меняться. Ускорение свободного падения тем меньше, чем ближе вы к центру. В центре ваша скорость не меняется вообще, ибо там силы тяготения в сумме дают нулевой вектор. Есть такой физический закон, который утверждает, что ускорение свободного падения пропорционально расстоянию до центра планеты, если плотность планеты постоянна. (То есть если осталось пролететь долю «x» от поверхности до центра, то ускорение свободного падения будет равно gx. При $x = 1$ будет просто g, при $x = 0{,}1$ будет $g/10$.)

Пояснение и лирическое отступление «о футболе на Луне». Например, радиус Юпитера в 11,2 раза больше радиуса Земли (рис. 92). Ускорение свободного падения на Юпитере в 2,52 раза больше, чем на Земле (оно, кроме радиуса, зависит и от массы планеты). Радиус же Луны меньше радиуса Земли в 3,67 раза, и на ней в 6,05 раза меньше ускорение свободного падения. Я представил себе лунный футбол, это, должно быть, совершенно замечательно. Огромные ворота высотой 12 метров и шириной 40 метров, и в них медленно летающий вратарь. Но бьют-то по мячу с той же силой. Должно быть, очень занятно. Я не знаю, может быть, в будущем когда-нибудь будет лунный футбол.

У нас ускорение получается такое: $a = -gx$, и надо пояснить, что означает знак «минус».

Сначала попытаемся понять, какое движение совершала бы Алиса в шахте, просверленной по диаметру земного шара, если бы в центре Земли никакой гномик не толкал бы ее в спину для увеличения скорости. Она полетела бы «вниз» (ощущение у нее было бы такое же, как у человека, упавшего в колодец). До момента достижения центра Земли скорость всё время нарастала бы (в этой задаче считается, что сопротивление воздуха отсутствует); максимальная скорость будет при пролете через центр Земли (в этой точке Алиса будет лететь по инерции, так как сила тяготения обратится в нуль). Затем начнет проявлять себя сила тяжести, направленная против движения. Она будет постепенно нарастать, всё сильнее уменьшая скорость полета Алисы. Ее скорость станет нулевой как раз в тот момент, когда Алиса пролетит всю Землю насквозь. Теперь сила тяжести направлена в противоположную сторону. И затем всё будет повторяться. Такое движение называется «колебательным». Чтобы оно могло возникнуть, тело должно испытывать действие так называемой *возвращающей силы.* Эта сила всегда направлена в сторону *положения равновесия* (в этой задаче точкой равновесия является центр Земли). При расчетах именно центр Земли удобно выбрать за начало координат, а ось иксов направить вдоль шахты от начала шахты (место вылета) к ее концу на другом краю Земли. Именно при таких условиях и была написана формула $a = -gx$.

В этой формуле $0 < x < 1$ (доля пути, оставшаяся до положения равновесия). Но обычно в теории колебаний этой буквой обозначают *отклонение* от положения равновесия (то есть от нуля). В этом случае появление знака «минус» становится понятным: возвращающая сила противоположна направлению отклонения, и она тем больше, чем больше отклонилась точка от центра. Она похожа по своему действию на заботливого пастуха: чем больше овца отклонилась от лужайки с травой, тем сильнее он гонит ее обратно. Скорость изменения какой-нибудь физической величины «x» обозначается в учебниках физики точкой вверху $\dot{x}$; а ускорение (то есть «скорость изменения скорости») — двумя точками $\ddot{x}$. При расчете любого движения точки вдоль прямой (в том числе и колебательного) математики заимствуют из физики *второй закон Ньютона*: «сила равна массе, умноженной на ускорение». Если «x» означает (как в нашей задаче про Алису) отклонение от начала координат, то уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m\ddot{x} = f(x),$$

где m — масса точки, $f(x)$ — закон изменения силы, управляющей движением точки, при изменении ее положения «x». Простейшее колебательное движение («гармоническое колебание») получается при

$$f(x) = -kx$$

(линейная возвращающая сила). В этом случае закон движения $x(t)$ (где t — время, прошедшее с момента начала движения) выражается суммой синуса и косинуса с некоторыми коэффициентами (отражающими информацию о начальном отклонении точки от центра и о начальной скорости движения точки). То, что физики называют *скоростью*, математики называют *первой производной*. А то, что физики называют *ускорением*, математики называют *второй производной*. Математики имеют в своем «арсенале» большой запас математических методов для решения различных уравнений движения. В частности, самое простое колебание описывается с помощью изменения значений косинуса (или синуса).

Если ускорение точки, движущейся вправо, отрицательное, значит, она тормозит, уменьшая свою скорость. Может быть такое, что при неизменном ускорении точка достигнет нулевой скорости и затем, остановившись на мгновение, будет двигаться в отрицательном направлении. Аналогичная ситуация может быть при движении точки влево и воздействии на нее *положительного* ускорения.

Слушатель: А «x» в каких единицах измеряется?

А.С.: Вопрос о единицах очень важный и правомерный. Можно измерять x в метрах, можно в километрах. В нашем случае x — доля радиуса — безразмерная величина. Решением уравнения, описывающего полет Алисы от падения в шахту и до достижения центра Земли, на самом деле служит обычный косинус.

Однако следует иметь в виду, что бывают задачи и с другими единицами измерения переменной «x».

Например, если «x» означает запас бензина в баке автомобиля (он изменяется с течением времени), то единицей измерения будет литр, а скорость расхода бензина будет тогда измеряться в литр/час. Но математики всё равно называли бы скорость расхода бензина «первой производной».

Вначале координата будет меняться медленно, потом Алиса будет набирать всё большую и большую скорость, ускорение же будет уменьшаться. Алиса сначала долетит до центра, а потом и до поверхности Земли с другой стороны (рис. 93), преодолевая нарастающую силу тяжести («возвращающую силу»), потом опять полетит обратно, и так до бесконечности.

Так вот. Спрашивается, какая скорость в центре Земли? Скорость в центре Земли очень серьезная. Там много, много метров

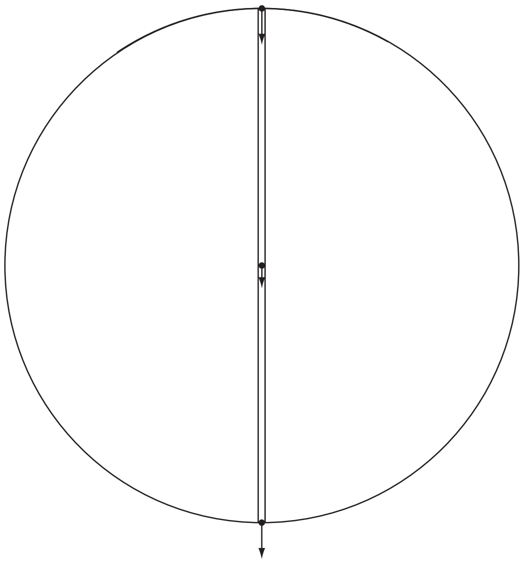

Рис. 93. Вот так Алиса миновала центр Земли и долетела до Америки.

в секунду. (Вычисления с помощью косинуса показывают, что эта скорость (независимо от массы тела Алисы) составляет 7910 м/с.) Что же происходит с энергией в полете то туда, то обратно? Есть такой **закон сохранения энергии**. Потенциальная энергия переходит в кинетическую, и наоборот. На поверхности Земли есть только потенциальная, в центре — только кинетическая. В полете к центру Земли потенциальная энергия постепенно уменьшается, а кинетическая — на такую же величину увеличивается.

Пока что мы обсуждаем особенности полета Алисы, не усложняя его появлением гномика, который толкнул Алису вперед в центре Земли.

Кинетическая энергия имеет формулу: $E = \dfrac{mv^2}{2}$, где v — скорость в данный момент.

Гном добавляет 1 м/с, то есть кинетическая энергия Алисы становится: $E = \dfrac{m(v+1)^2}{2}$.

Это должно компенсироваться тем, что Алиса вылетит вверх на некоторую высоту, чтобы прибавка потенциальной энергии компенсировала убавку дополнительной кинетической энергии.

Потенциальная энергия записывается формулой $E = mgh$.

При удалении от поверхности Земли g будет немного меняться по сравнению со значением 9,81, но не очень сильно.

Давайте посмотрим на разницу этих двух кинетических энергий. $E = \frac{mv^2}{2}$ — до прибавки в скорости, $\frac{m(v^2 + 2v + 1)}{2} - \frac{mv^2}{2}$ — увеличение энергии после прибавки.

Единицу мы, как водится, игнорируем, она очень маленькая, $2v$ остается. В итоге разница получается равной mv. Этой разнице и должна быть равна потенциальная энергия в точке максимального подъема Алисы на другой стороне Земли:

$$mv = mgh.$$

Масса сокращается, то есть масса Алисы здесь никакого отношения к делу не имеет. Совсем, казалось бы, не важно, кого пнул гном. Однако следует отметить, что худенькой Алисе гному будет легче неожиданно придать лишний 1 м/с, чем увесистой Алисе. Впрочем, это проблемы гнома, а не наши с Алисой.

Остается формула: $v = gh$. То есть h равно $\frac{v}{g}$ (если посчитать, получается 805 метров). Добавление 1 м/с в центре земли дает вылет вверх из дыры примерно на 800 метров.

А что говорит наша интуиция? Не нарушил ли наш гном закон сохранения энергии? Нет, не нарушил. Просто гному будет не так-то легко увеличить скорость Алисы на 1 м/с. Ему придется со страшной силой размахнуться кулаком, чтобы кулак приобрел скорость Алисы (7910 м/с) плюс еще 1 м/с. Мы бы с вами этого не смогли сделать. А гном, как существо волшебное, может!

Проверим задачу про звезды.

Первое, что надо осознать: те звезды, которые вы не видите летним днем из-за солнца, можно будет увидеть через полгода (зимней ночью). См. схему на рис. 94.

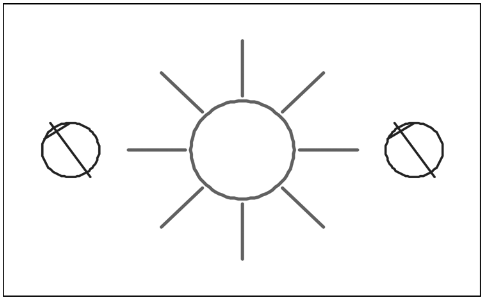

Рис. 94. Земля, не меняя наклона своей оси к плоскости эклиптики, вращается вокруг Солнца (справа — на Земле лето, и освещенное Солнцем северное полушарие не позволяет людям различить звезды; слева — на Земле зима, ночь). И справа, и слева ось Земли направлена в одну и ту же точку небесной сферы, поэтому видны одни и те же звезды. Важно, что расстояние между указанными двумя положениями Земли ничтожно мало по сравнению с расстоянием до ближайших (не считая Солнца) видимых на небе звезд.

Поэтому то, что вы видите во время затмения, вы уже видели полгода назад и увидите опять через полгода вперед (если этому не помешают тучи и т. п.).

Врезка 8. Кое-что о небесной сфере

Космос велик и необъятен. Ему, в общем-то, нет дела до ничтожной пылинки, называемой «планета Земля». Но на ней проживает многочисленное племя людей, которые в свободное от работы время не прочь поразмыслить над вопросами «что такое Космос» и «влияет ли Космос на жизнь человека». По поводу первого вопроса до сих пор спорят ученые — даже не смогли до сих пор понять, ограничен ли Космос по размерам, или не ограничен. А простые люди думают так: если и ограничен, то всё же он так велик, что его всё равно облететь нельзя. Так какое нам до этого дело? На второй вопрос многие люди склонны ответить так: наверное, Космос как-то влияет на жизнь людей — но гораздо меньше, чем *курс доллара*! Космос, конечно, может преподнести нам подарок в виде огромного метеорита, который сотрет жизнь на Земле — да ведь это когда еще будет! Может, в это время и долларов уже не будет.

Тем не менее было решено, что на всякий случай за Космосом надо следить с помощью специального воображаемого «телевизора» со сферическим экраном. Это и есть НЕБЕСНАЯ СФЕРА. Где же находится центр этой воображаемой сферы и чему равен ее радиус? Для ответа на этот вопрос надо понять, что же является самым важным для жизни человеческой цивилизации. Конечно же, «земная сфера», то есть поверхность Земли. Поэтому и центр небесной сферы был выбран в центре Земли, с учетом «земного эгоизма» людей. (Наверное, если бы земляне и марсиане жили бы в виде единой цивилизации, центр небесной сферы был бы выбран не в центре Земли, а в центре Солнца.) Что же касается радиуса небесной сферы, то его надо выбрать побольше (чтобы эта сфера находилась далеко от Земли), но не слишком большим (чтобы внутри этой сферы не оказались ближайшие (не считая Солнца) звезды). Конкретное же значение радиуса никого особенно не интересует — лишь бы мы на этой сфере сумели разглядеть все подробности из жизни Космоса. Итак, земная и небесная сфера являются *концентрическими*. На земной — имеются две важные для землян точки: северный и южный полюс. Через них проходит важная для землян прямая — земная ось. Земля вращается вокруг этой оси с периодом 24 часа*. А вот и каверзный вопрос: почему 24? Ответ (неубедительный): потому, что так решили древние астрономы. Но ведь это было пару тысяч лет назад. За это время старушка-Земля могла притормозить свое вращение. А ну как вдруг период ее вращения теперь равен 24,37 часа? Ответ (нелогичный): часов-то по-прежнему 24, но сам час стал немного длиннее. Нелогичность его в том, что нам всё равно надо знать, происходит ли замедление (или, скажем, ускорение) — неважно, как мы это назовем — удлинение периода или удлинение часа. К счастью, сейчас физики

*Дьявол кроется в деталях. Строго говоря, это утверждение *неверное* (попробуйте понять, почему!).

могут определять длительность промежутка времени независимо от вращения Земли, причем с высокой точностью. И никаких признаков изменения периода вращения земного шара не обнаружено. Пока не обнаружено. А завтра прилетит какой-нибудь укрупненный метеорит и врежется в Землю...

Следующие два важных термина — *зенит* и *надир*. Зенит — это точка, лежащая на небесной сфере прямо над головой наблюдателя, надир — точка, лежащая на противоположной стороне небесной сферы (то есть под ногами наблюдателя, так что он и наблюдать-то ее не сможет). Вы чувствуете, какой подвох есть в этом определении? Земля у нас одна, а наблюдателей на ней может быть очень много — и на суше, и на море. Значит, и точек зенита будет очень много. И даже какие-то два наблюдателя могут сильно поспорить по поводу одной и той же точки на небесной сфере: один скажет, что это «зенит», другой — что это «надир». Надо как-то ограничить «персональный эгоизм» наблюдателя. Поэтому было объявлено, что все эти наблюдатели «воспомогательные», кроме двух «основных». Один из двух наблюдает на северном полюсе, другой — на южном. Кстати, а какой из полюсов назвать северным, а какой — южным? Ведь и здесь, и там очень холодно... Этот вопрос не очень важен, но всё же решено было, что над северным полюсом находится зенит, а над южным — надир. И остался только один «основной» наблюдатель — тот, у которого над головой зенит. Через северный и южный полюс провели прямую и продолжили ее до пересечения с небесной сферой. И далее стали именовать эту прямую не «земная ось», а «ось мира». Вот тебе и раз! Да какое же право имеет маленькая, совсем незаметная в масштабах Космоса планета Земля указывать, как должна быть направлена ОСЬ МИРА? Это — типичнейший пример «земного эгоизма». Погодите, дальше еще и не такое будет!

Итак, стоит на Северном полюсе наблюдатель, смотрит в небо, и совершает (вместе со всем земным шаром) один оборот за 24 часа. А ему кажется, что и он, и Земля стоят на месте, а весь огромный Космос, со всеми его звездами и кометами (да и с нашим Солнцем тоже), медленно вращается в другую сторону. И чтобы убедиться в этом, достаточно поглядеть довольно долго на экран того «телевизора», через который земляне наблюдают Космос (то есть на небесную сферу). Осталось совсем немного, чтобы силами землян достроить для всего Космоса космическую систему координат (в которой, смеха ради, считается, что Земля абсолютно неподвижна, а всё остальное (в том числе и Солнце) вращается вокруг нее). Рассмотрим плоскость, проведенную через земной экватор. Продолжим ее до пересечения с небесной сферой. Получится «мировая экваториальная плоскость» для всего космического пространства. Вы, наверное, думаете, что именно в ней находится Солнце и вращаются все другие планеты? Ничего подобного! Солнце и планеты находятся в другой плоскости (она называется «эклиптикой»). Обе эти плоскости пересекаются в центре Земли (так что эту точку называют «начало координат мира»). Конечно, у этих двух плоскостей есть и другие точки пересечения (они пересекаются по прямой). Плоскость эклиптики пересекает экваториальную плоскость под углом 23,5 градуса. Земная ось направлена в зенит (zenit), поэтому ее и назовем «ось Z». Осталось указать в экваториальной плоскости, как провести через центр Земли ось X и ось Y. Главное — это задать направление оси иксов. Для этого надо найти на экваторе (естественно, на земном, а не на небесном) *нулевой меридиан.* На этот счет имеется как минимум два мнения. Англия считает, что надо таковым считать Гринвичский меридиан, а Россия — что Пулковский меридиан. (А какая-нибудь цивилизация из созвездия Тау Кита, считает, что центр мира вообще не должен находиться в центре Земли.) В целях унификации общеземной системы космических координат можно провести ось иксов в направлении, например, Гринвича*. Теперь уже можно определить для каждой точки на поверхности Земли (а также и для любой точки Космоса) две координаты: *долготу и широту.* Нужна еще третья координата — расстояние от центра Земли до интересующей нас точки. Для точки на поверхности Земли (считаемой «идеаль-

*Так и быть, сделаем этот щедрый подарок англичанам!

ным шаром») эта координата равна усредненному радиусу Земли R (примерно 6371 км). Для звезды в Космосе (как бы далеко она ни находилась от небесной сферы) в качестве третьей координаты надо брать радиус небесной сферы, потому что все эти звезды надо спроектировать из бездны Космоса на экран «телевизора» для разглядывания Космоса, то есть на небесную сферу. Так как радиус этой сферы не уточняется, то в Космосе используются только две (угловые) координаты: долгота и широта луча, идущего из центра Земли в данную звезду (или комету, или метеорит...)

Имея систему координат на небесной сфере, можно уже составлять карту всех созвездий. В этой системе Солнце описывает по небесной сфере замкнутый путь, причем оно при этом отнюдь не видно в виде точки (подумайте, почему?). Поэтому необходимо говорить не про «путь Солнца», а про путь центральной точки солнечного диска на небесной сфере. На этот путь у солнечного диска уходит ровно один год (то есть примерно 365,25 суток). Несмотря на неудобство такой системы координат по сравнению с системой Коперника, в ней успешно рассчитали (не пользуясь даже компьютерами!) в каждой точке Земли восходы и заходы Солнца и их длительность. (См. далее основной текст.)

Приведенная выше врезка для чтения необязательна, хотя она дает первоначальный обзор трудностей, связанных с выбором общекосмической системы координат. Те, кто хотят глубже понять то, что сказано во врезке, могут попробовать ответить на вопрос: верно ли, что наблюдатель на Северном полюсе, глядящий вертикально вверх, увидит, что в точке «зенита» находится Полярная звезда? ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) Он увидит там центр созвездия «Южный крест»; 2) В течение ночи он увидит в этой точке разные звезды; 3) Полярная звезда находится близко к зениту, но не совпадает с ним; 4) Так как радиус небесной сферы не определен, а расстояние до Полярной звезды (в принципе) определено, то этот вопрос бессмысленный.

На самом деле, для решения этой задачи правильной моделью является одинокая (то есть без Солнца и планет) Земля в черном страшном Космосе, которая вертится вокруг своей оси. Людям, глядящим ночью на небо, кажется, что Земля стоит на месте, а всё звездное (видимое им) небо медленно вращается в противоположную сторону вокруг Полярной звезды. (Пока, в «наше» время. Через тысячу лет определять центр вращения будет *другая* звезда.) Вопрос: что и откуда видно этим наблюдающим людям? Ответ: Петербург отличается от Москвы северной координатой широты. Остальные координаты (долгота) в данном случае нам не важны. Чтобы понять, кто видит на небе больше звезд (москвичи или петербуржцы), рассмотрим сначала наблюдение из двух особенных точек: с экваториальной точки (любой из этих точек) и с Северного полюса. Что видно с Северного полюса? Краткий ответ: только то, что «сверху». Но где же в Космосе верх, и где низ? Сразу для всего Космоса вряд ли можно разумно ответить на этот вопрос. Но любой конкретный наблюдатель Земли прекрасно ответит на него: «То, что у меня под ногами — это “низ”. А остальное — это “верх”. Я сейчас стою на плоскости, отделяющей верх от низа, и потому я вижу звезды только половины небесной сферы». Человек, имеющий чисто математическое образование, не умеряемое здравым смыслом физика (или астронома), сразу же запальчиво возразит этому *неучу* (по его мнению): «Никакая это не плоскость, а сферическая поверхность, и на ней только мысленно можно пририсовать касательную плоскость, именно в той точке, где стоит *этот неуч*». — «А вот и нет!» — очень разумно ответит «неуч»: «Я вижу только кусок этой поверхности от моих ног и до горизонта. А горизонт примерно в 4 километрах от меня, поэтому видимый мною кусок сильно похож на плоскость — ведь 4 км очень мало по сравнению с 6400 км (то есть с радиусом Земли). И эта плоскость сильно мешает мне увидеть звезды на второй половине небесной сферы». И в этом он будет абсолютно прав. Короче говоря, если мы хотим понять, какую часть небесной сферы (с мерцающими на ней звездами) видит тот или иной земной наблюдатель, надо через подошвы этого наблюдателя провести плоскость, касательную к земной поверхности. Она разделит небесную сферу на две равные части. Он видит ту, которая у него над головой. Если бы старушка-Земля была прозрачной, он бы увидел у себя под ногами и вторую часть. Если бы этот наблюдатель внезапно вырос бы до размеров… ну, скажем, Джомолунгмы, он бы увидел, что под ногами у него не плоскость, а часть земной сферы, и она, искривляясь, мешает ему увидеть целиком всю небесную сферу. Однако при этом он, конечно, видел бы БОЛЬШЕ ПОЛОВИНЫ поверхности небесной сферы, а меньшая ее часть была бы ему не видима. А если бы он и еще «немножко» подрос — чтобы его рост «хотя бы» стал равен расстоянию до ближайших звезд, — тогда бы он смог наблюдать почти все звезды небесной сферы (маленькая старушка-Земля у него под правым каблуком почти не мешала бы ему изучать звёзды). Но мы, земные люди, не могли бы быть такими гигантами — нас бы раздавила наша собственная тяжесть. Поэтому человеку надо быть очень скромным и считать себя маленькой незаметной точечкой по сравнению с земным шаром. Однако по поводу сказанного выше можно было бы задать два коварных вопроса. Я лучше их сам сразу сформулирую. 1) Допустим, на Земле не было бы гор и океанов. Тогда люди жили бы во всех местах земной сферы. И по ночам наблюдали бы небо. Так что же, в этом случае всю Землю пришлось бы покрыть касательными плоскостями? ОТВЕТ: представьте себе, именно так и делают настоящие математики. И то, что получается, у них даже носит специальное название: *«касательное расслоение для сферы»*. И потом успешно изучают полученный объект. 2) Стоп. Только что было сказано, что для каждого наблюдателя видна ровно половина звезд небесной сферы. А вот и нет. Давайте возьмем двух диаметрально противоположных наблюдателей Земли. Для каждого из них проведем касательную плоскость. Ведь эти две плоскости будут параллельны? А две параллельные плоскости делят пространство, в котором мы живем, на **три части**. Как же может каждый из двух этих наблюдателей видеть половину небесной сферы? Каждый из них должен видеть меньше половины! ОТВЕТ: «с точки зрения звезд» не только человек является ничтожной точкой, но и даже Земля — ничтожная точка. И с их точки зрения зазор между двумя параллельными плоскостями (равный диаметру Земли) пренебрежимо мал. То есть вместо двух плоскостей они «видят» как бы одну слившуюся плоскость. И если какая-то звезда окажется на этой плоскости, она погоды не делает. Умные математики в таких случаях любят говорить что-нибудь успокоительное, типа: *множество этих звезд имеет меру нуль*. Ситуация тут примерно такая, как при сравнении между собой двух чисел: 1000000,098 и 999999,978. Ну да, первое число чуть-чуть больше второго, но с точки зрения физика можно (и нужно) пренебречь этой разницей и сказать, что эксперимент с высокой точностью подтвердил их совпадение. А не совпали они полностью потому, что во время земных измерений кто-то неожиданно чихнул на Марсе...

Итак, каждый человек в любой момент времени видит звезды только половины небесной сферы. Другая половина не видна, ее загораживает Земля (хотя она вовсе не занимает половины пространства). Фактически, модель ситуации (при наблюдении из космоса) такая. Вы прижимаете к Земле плоскость в любой точке — хотите, в Москве, хотите — в Питере, и наблюдаете ее полный оборот вместе с Землей. В этой плоскости отметим прямую, касательную к меридиану в выбранной точке. В процессе поворота Земли вокруг полярной оси эта прямая опишет поверхность некоторого конуса, которого в каждый момент касается плоскость (оставаясь при этом касательной и к поверхности Земли — потому что Земля оказывается вписанной в этот конус). Вот теперь мы, наконец-то, добрались до изучения двух особых наблюдателей: экваториального и полярного (см. рис. 95). А там, глядишь, и с точкой «Москва», и с точкой «Петербург» станет ситуация понятной. Они же ведь точки по сравнению с Землей, правда?

Рис. 95 показывает, какие звезды увидят наблюдатели, находящиеся на широте 0 градусов (экватор) и на широте 90 градусов (полюс), если они будут в течение 24 часов наблюдать звездное небо (то есть пока Земля совершит полный оборот). Понятно, что в дневное время свет Солнца помешает видеть звезды (а если случится полное солнечное затмение, то всё же увидят). Но есть такие участки звездного неба, которые наблюдатель **в принципе** не сможет увидеть. Например, наблюдатель на экваторе не уви-

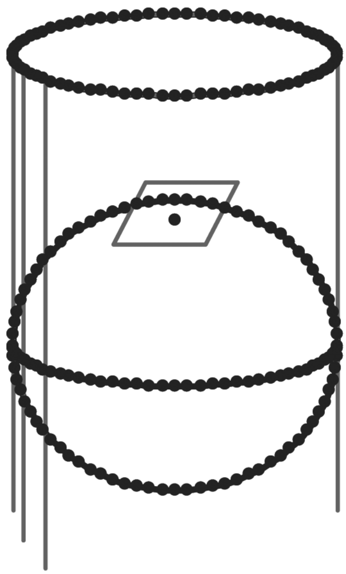

Рис. 95. Поверхность Земли с указанием экватора и Северного полюса (нижняя часть рисунка). Вертикальные линии — образующие бесконечной в обе стороны цилиндрической поверхности. Для удобства восприятия верхняя часть цилиндрической поверхности срезана горизонтальной плоскостью (верхняя линия — край среза). Отдельная точка — это Северный полюс. Через него проведена горизонтальная плоскость, касающаяся Земли. Эта плоскость схематически изображена в виде параллелограмма.

дит (ни в какое время суток) тех звезд на небесной сфере, которые лежат *внутри цилиндрической поверхности**. (Половина невидимых звезд лежит «выше северного полюса», другая же половина «ниже южного».) Наблюдатель же, находящийся на Северном полюсе, не увидит (ни в какое время суток) звезд «нижней половины небесной сферы». Но зато звезды «верхней половины» он увидит не постепенно в течении 24 часов, а все СРАЗУ. Дело в том, что го-

*Вышеописанные соображения позволяют заключить, что таковых «почти нет».

ризонтальная касательная плоскость на рис. 95 по мере вращения Земли хотя и будет поворачиваться, но она всё время будет совпадать сама с собой. Если мы рассмотрим только наблюдателей из северного полушария, то можно сформулировать такое достаточно простое правило:

«Видно всё, кроме внутренности конуса». Чем ближе к северу находится наблюдатель, тем более «плоский» получается конус, и тем меньше звезд видно. Чем ближе к экватору он находится, тем более «острый» получается конус (а на экваторе его вершина оказывается удаленной до бесконечности; на полюсе же его вершина совпадает с самим полюсом). См. рис. 96.

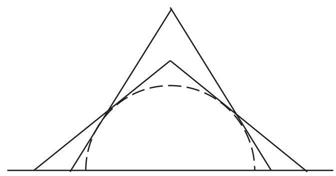

Рис. 96. Широта Москвы (56 град.) меньше широты Петербурга (60 град.), поэтому коническая поверхность, внутри которой располагаются невидимые звезды, для Москвы имеет более значительную высоту над полюсом, но угол расхождения левого и правого луча из вершины меньше, чем для Петербурга. Поэтому из Москвы видно *больше* звезд (если наблюдение вести 24 часа). (Рекомендуем мысленно вращать этот рисунок относительно оси симметрии — пунктирная линия образует тогда северное полушарие Земли, а сплошные — «конусы невидимости».)

Поэтому из Санкт-Петербурга видно меньше звезд, чем из Москвы (рис. 97). А на экваторе не видно ни Полярной звезды, ни Южного Креста (да и соседних с ними звезд тоже не видно). Однако последнее утверждение является схоластическим. Чтобы понять это, представьте себе, что цилиндрическая поверхность, изображенная на рис. 95, продолжена вверх до пересечения с небесной сферой. Тогда на этой сфере получится линия пересечения в виде окружности, радиус которой примерно равен 6400 километров (радиусу Земли). А радиус небесной сферы, как указано выше, примерно равен расстоянию до ближайшей звезды (не считая Солнца). Это расстояние неизмеримо больше, чем 6400 км. Так что даже с помощью самого мощного современного телескопа будет проблематичным понять, какие же звезды попали в «область невидимости» для экваториального наблюдателя!

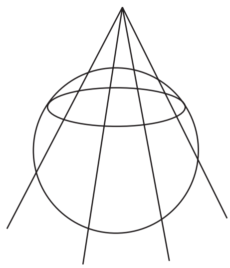

Рис. 97. Семейство прямых, касательных к меридианам.

Задача про 22 мая.

В формулировке задачи упоминаются такие известные даты, как «летнее солнцестояние» (22 июня) и «зимнее солнцестояние» (22 декабря). Здесь уже без Солнца никуда! В этом случае, казалось бы, надо использовать гелиоцентрическую модель Коперника, но вполне работает и модель Птолемея, в которой Солнце вращается вокруг Земли. В этой модели, как объяснено во врезке, Земля преспокойно стоит на месте, несмотря на возмущение других миров, населенных мыслящими существами (согласно пословице «Вся рота шагает не в ногу, один поручик — в ногу»).

Что же происходит в нашей земной системе координат? В зависимости от времени года солнце всходит и заходит в разное время. Но восходит/заходит оно под разным углом, поэтому меняется скорость восхода и заката. Когда наступает темнота? Когда Солнце достаточно низко «залегает» под уровнем горизонта. *(ПОЯСНЕНИЕ. В этом месте в астрономию вмешиваются... государственные законы. Надо дать юридическое определение, что такое «сумерки». Ведь с наступлением сумерек государство должно потратиться на освещение объектов цивилизации. Вот и появились* *на свете два вида сумерек: «гражданские сумерки», начинающиеся с глубины залегания Солнца в 6 градусов, и «астрономические сумерки», когда на небе можно различить практически все видимые звезды, начинающиеся с глубины в 18 градусов.)* В дни равноденствия Солнце уходит под крутым углом к линии горизонта, поэтому темнеет очень быстро. А в дни солнцестояния угол, под которым заходит солнце, оказывается гораздо более пологим, поэтому темнеет и светает медленно.

В высоких широтах северного полушария (равно как и в низких широтах южного) заметен эффект, который можно назвать «фальшивыми сумерками» — или, более поэтично, «белыми ночами».

Солнце начинает нисходить за горизонт под малым углом, но очень быстро выходит на угол еще меньший, чтобы «успеть быстро выскочить обратно», ибо широта этого места такова, что еще немного, и начнется сплошной полярный день, без всяких сумерек. В итоге еще не кончились вечерние сумерки, как пора уже готовиться к рассвету. Как это было у Пушкина: «Одна заря сменить другую // Спешит, дав ночи полчаса...» И что же получается? Не только не достигнута «глубина залегания Солнца» в 18 градусов (астрономические сумерки), но и даже не дотянули до 6 градусов (гражданские сумерки). Значит, градоначальник не включит освещение, и придется нам уподобиться тому же Пушкину (*«когда я в комнате моей пишу, читаю без лампады...»*). Вот в Питере уже заметен этот эффект — там просто никогда не темнеет до конца. Даже вот это расстояние до Полярного круга (это расстояние примерно 7 градусов в Питере) — оно такое, что не темнеет просто, да и всё тут! 7 градусов под горизонтом позволяет получать от спрятавшегося Солнца вполне достаточную подсветку. Ведь Питер — это 60-я параллель, а 66° и 33 минут (66,5622°) — это Полярный круг, где уже светло, где Солнце 22 июня просто сияет круглые сутки. Из этого, в частности, следует, что в Мурманске на самом деле зимой немного светает, потому что 69-я параллель отличается от 67-й всего на 2 с лишним градуса, поэтому на самом деле зимой в Мурманске в 3 или 4 часа вполне себе светло, просто Солнца нет. Потому что если бы там было темно, то тем более было бы темно ночью в Петербурге летом. Но это ведь не так. Летом в Петербурге достаточно светло, а уж тем более на Соловках, 64-й градус. Соловки и Мурманск симметричны относительно Полярного круга. Поэтому если 22 июня на Соловках можно просто читать газету в час ночи, то значит, что в Мурманске 22 декабря в час дня тоже можно будет читать газету, это будет то же самое состояние светового дня. Это надо понимать, потому что когда вам говорят, что там, в Норильске или Мурманске, никогда не светает в течение полугода, это сказки просто. Светает, каждый день, но солнце не восходит. А вот на Диксоне, да. В порту Диксон на широте 73,5 градусов состояние «22 декабря в час дня» почти такое же, как в Москве «22 июня в час ночи», то есть практически темно, поэтому уже в Диксоне, например, никакого вам не будет «рассвета» в течение пары месяцев подряд. Вот. Учтите это, когда будете планировать ваши путешествия. Все загадки отгаданы.

Слушатель: Нет. Не обсудили про качели.

Задача про качели.

Итак. Начнем с простого. Качели, которые устроены как палка и сидение (рис. 98). Какие у них устойчивые положения равновесия и почему?

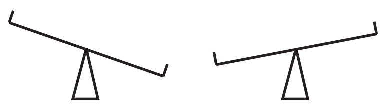

Рис. 98. Почему эти качели не поддаются уравновешиванию?

Почему положение уравновешивания (рис. 99) не является устойчивым? Предположим, что качели чуть-чуть покачнулись от ветерка. Они перешли в следующее состояние: (рис. 99).

Видно, что одно плечо рычага после поворота уменьшилось, а другое увеличилось. Поэтому качели наклонятся в сторону большего плеча. И это можно показать математически. Но не нужно. Это давным-давно уже сделано в механике, причем в виде общей и очень простой теоремы: **чтобы жесткая система сохраняла**

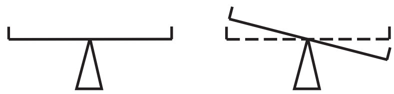

Рис. 99. Проследим-ка мы, что произошло с центром тяжести системы «доска+спинки».

равновесие, центр тяжести этой системы должен лежать ниже точки опоры.

А теперь рассмотрим ситуацию, когда у качелей вместо спинок есть держалки для ног (рис. 100).

Рис. 100. Центр тяжести ниже точки опоры.

Пусть опять подул ветерок, и качели наклонились. Опять изменились плечи, только увеличилось то плечо, которое сверху. Поэтому качели потянет вниз, обратно к горизонтальному состоянию равновесия. А дело в том, что теперь центр тяжести НИЖЕ точки опоры (сами поймите, почему).

Но самое интересное, почему качели без спинки и подножки всё равно находятся в наклоненном виде? Здесь и без теоремы ясно.

Дело в том, что у доски есть толщина. И когда качели наклоняются, одно плечо получается на маленький треугольничек больше, чем другое (см. рис. 101).

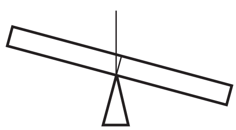

Рис. 101. Центр тяжести доски понизился.

Он-то и перевешивает качели в сторону.

* * *

А теперь — **нерешенные проблемы школьной математики.** Но прежде я хочу рассказать о том, как мыслят математики, как они решают задачи. Есть такой английский принцип: «Think out of the box», то есть «Подумай, не выглянуть ли за пределы исходного ящика». Давайте посмотрим, как он работает.

Задача:

На плоскости даны три различные по радиусам окружности, не пересекающиеся друг с другом. К каждой паре окружностей проведена пара внешних касательных, и отмечена точка их пересечения (см. рис. 102). Лежат ли три отмеченных точки на одной прямой?

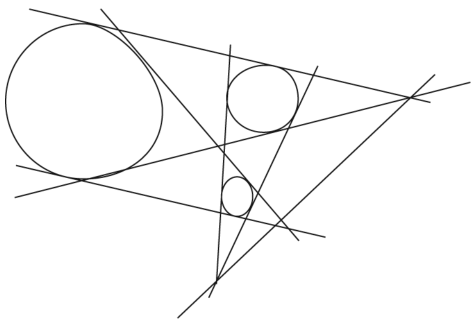

Рис. 102. Рисунок-шутка. (Из-за нарочито небрежно нарисованных пар касательных читателю пытаются внушить НЕВЕРНЫЙ вывод о том, лежат ли точки пересечения пар касательных на одной прямой).

ОТВЕТ: *точки пересечения касательных лежат на одной прямой.*

А как же быть с рис. 102? Он что, нас обманывает? Да!!! С рисунками это часто бывает. Поэтому делать выводы надо не после беглого взгляда на рисунок, а после строгого математического доказательства (или строгого опровержения).

Доказательство состоит в следующем. Рассмотрим три полусферы, которые пересекаются нашей плоскостью по своим большим окружностям. Представьте себе 3 сферических купола большого, среднего и малого радиуса.

Эти 3 сферы сверху накрываются постепенно опускающейся вниз горизонтальной плоскостью, пока не произойдет касание самого большого купола. (Такая плоскость ровно одна.) Теперь (глядя на рис. 102 и мысленно выходя за пределы исходной плоскости) будем «вертеть» получившуюся плоскость до тех пор, пока она, оставаясь касательной к большому куполу, не коснется среднего купола; затем вертим ее дальше (не теряя точек касания с большим и средним куполом), пока она не коснется малого купола. Такая «трижды касательная плоскость» уже ровно одна (здесь надо предполагать, что центры окружностей не лежат на одной прямой). Так вот. После очень простых соображений становится очевидно, что наши отмеченные точки лежат в этой новой плоскости.

(ПОЯСНЕНИЕ. Считая, что рис. 102 нарисован не на плоскости, а в пространстве, содержащем исходную плоскость, представьте себе, что вместо пары внешних касательных мы нарисовали *конус*, внутри которого «спрятались» касающиеся этого конуса сферы. Таких конусов будет ТРИ. Вершина каждого из них находится (как нам подсказывает «пространственное воображение») как раз там, где находятся отмеченные в условии задачи точки.)

Но отмеченные точки также лежат и в исходной плоскости. Значит, они лежат *на прямой пересечения этих плоскостей*. Теорема доказана.

Я сейчас пояснил, как думают математики. Это задача никаким простым методом не решается без выхода в пространство. Выход в пространство решает ее в один ход. Так происходит с математикой. Идея — *выйти за пределы того, что у вас дано*. Математика — это выход за пределы. Все великие открытия, все великие доказательства связаны с покиданием пределов изученного, пределов данного и требуемого в задаче.

Нерешенные математические проблемы

Самая старая — из известных мне — нерешенная математическая проблема. Говорят, был такой в Сиракузах царь или вельможа, который занимался странным видом деятельности*. Он брал

---

*Согласно последним данным, которые я получил, никакой царь ничем таким не занимался. Да и проблема гораздо моложе. См. http://egamath.narod.ru/Nquant/Collatz.htm.

натуральное число. Если оно было четное, он делил его на 2, пока оно не станет нечетным. Например, если это было число 12, оно превращалось в 3.

$$12 \to 6 \to 3.$$

А вот когда оно становилось нечетным, он умножал его на 3 и прибавлял единицу. То есть 3 он превратил бы в число 10. А 10? Сначала в 5, потом в 16. 16 в 8, 4, 2, 1 и в итоге в 4.

$$12 \to 6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4.$$

Как видите, мы сейчас пришли к циклу:

$$4 \to 2 \to 1 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4 \to 2 \to 1 \ldots$$

Давайте возьмем еще какое-нибудь число. Скажем, 13 возьмем.

$$13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4.$$

Опять начинается такой же цикл. Возьмем 17.

$$17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to \\ \to 2 \to 1 \to 4.$$

Заметьте, что от 17 уже довольно далеко до повторяющейся части. Сиракузский царь (или кто-то еще) перебрал первую тысячу чисел и обнаружил, что все они приходят к одинаковому концу, их всех ждет цикл «$4 \to 2 \to 1$». При этом для некоторых чисел цепочки получаются очень длинные, и числа в процессе преобразований достигают очень больших значений. Число 27 достигает 9232, приходит к циклу за 112 шагов. Вопрос: любое ли число придет к циклу? Ответ был (якобы) неизвестен 2500 лет назад, и до сих пор неизвестен. Конечно же, компьютеры давно запущены, и числа давно проверены до величины порядка 10^{15}. Компьютер продолжает работать. Но все числа перебрать нельзя. И даже если бы компьютер не довел какое-то число до цикла — это не доказывает, что этого сделать нельзя. Возможно, цепочка просто очень длинная. Что в этой проблеме интересно? Вспомним теорему Ферма (для нее тоже получалась всё более длинная цепочка степеней «n», для которых она верна). Но ее доказали для любого «n» без помощи компьютера (в принципе, если бы компьютер предложил три числа x, y, z и степень «n», которые опровергли бы теорему Ферма, он бы решил проблему). А в нашем случае компьютер ничего не может. Разве сам только он найдет какой-то новый цикл!

В 1994 году Уайлз, готовясь к докладу, нашел ошибку в своем доказательстве «великой теоремы Ферма». К счастью, ошибка оказалась несущественной и была им исправлена. А 1 апреля ему пришло электронное письмо, в котором математик, известный Уайлзу, писал, что, пользуясь его методами, он **опроверг** теорему Ферма. В письме приводились числа и опровержение, содержащее маленькую, незаметную ошибку... У Уайлза был шок (он забыл про 1 апреля). К счастью, эта шутка оказалась не смертельной.

Но теорему Ферма в итоге долгих усилий доказали, а рассматриваемую нами — нет. Уже столько лет требуется человек (апрелеустойчивый), который это докажет.

Следующая по сложности проблема – тоже простая (по формулировке, конечно). Она поставлена сравнительно недавно. И я совершенно уверен, что ее скоро решат.

Давайте рассмотрим прямую линию. Можно ли раскрасить прямую линию в две краски так, чтобы точки на расстоянии единица всегда получались разноцветными? Ясно, что одного цвета недостаточно, а в два цвета раскрасить можно. Например, всю прямую можно разбить на полуотрезки длины 1 с отброшенным правым концом. И эти полуотрезки поочередно закрашивать то красным, то зеленым цветом.

Поэтому для прямой минимальное количество цветов, которое требуется, чтобы любые две точки на расстоянии 1 были разноцветными, равно двум. Соответствующее число для плоскости *никому не известно.*

Давайте рассмотрим некоторые начальные соображения. На плоскости есть равносторонний треугольник со стороной 1 (рис. 103). Закрашивая всю плоскость, мы, конечно, закрасим и всю площадь этого треугольника, и всю его границу — в частности, закрасим и все вершины этого треугольника.

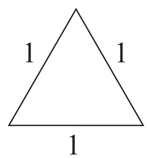

Рис. 103. Выбираем самый трудный для закрашивания треугольник.

Сколько нам нужно цветов?

Слушатель: Хотя бы 3...

А.С.: Да, двух уже недостаточно. Иначе из трех вершин на расстоянии 1 друг от друга две окажутся одноцветными. Ведь этот треугольник специально взят таким, чтобы длины его сторон были «запрещенными».

Поэтому нужно хотя бы три разных цвета (скажем, К — красный, С — синий, З — зеленый). Представьте себе, что с трех сторон к этому треугольнику пририсованы такие же треугольники, затем еще и еще приклеиваем множество таких «особо трудных» треугольников, пока вся плоскость не окажется сплошь покрытой ими. (Математики в этом случае говорят так: рассмотрим на плоскости ТРЕУГОЛЬНЫЙ ПАРКЕТ.) Раскрасив правильным образом этот паркет цветами К, С, З (если бы нам это удалось), мы бы полностью решили поставленную задачу для плоскости. Вы, конечно, догадываетесь, что нам не удастся этого сделать (иначе бы эту задачу давно бы уже решили опытные математики). Но мы всё же попробуем это сделать — возможно, от этого расширится горизонт наших знаний. Сначала раскрасим правильным образом только *вершины 3-угольного паркета.* Эти вершины образуют горизонтальные ряды на плоскости; в каждом ряду вершины смещены на $\frac{1}{2}$ по отношению к предыдущему (и последующему) ряду. Предлагается такой способ раскраски вершин в этих рядах (рис. 104).

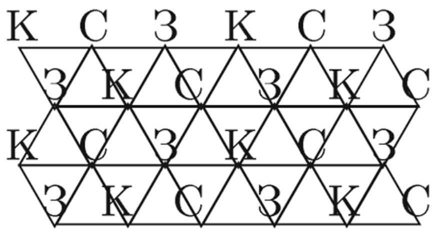

Рис. 104

Как вы видите, каждые три ближайшие вершины закрашены разными цветами, как и должно быть по условию. Ведь расстояние между ними как раз равно 1. Обратите внимание, что третий ряд раскрасок совпадает с первым, четвертый — со вторым, и т. д. до бесконечности. В данном случае (когда мы используем только три разных цвета) это не случайность — легко понять, что две вершины «через ребро» будут одноцветными (см. рис. 104). В самом деле, если разрешенных цветов только три, то для «отраженной» вершины просто нет выбора. Однако при любой попытке продолжить раскраску на ребра паркета (и далее на собственно плитки) нас постигнет неудача. Эта неудача не является случайной (изза того или иного неверного подхода к этой задаче), а является следствием такой (уже доказанной) теоремы: **Для правильного закрашивания плоскости заведомо не хватит трех красок.** Доказано и полезное добавление к этой теореме: для успешного закрашивания заведомо хватит СЕМИ разных красок. Таким образом, в настоящее время известно следующее: минимальное количество красок для закрашивания плоскости равно либо 4, либо 5, либо 6, либо 7.

Эту теорему можно доказать вполне школьными вычислениями, и мы это сделаем — жалко было бы не познакомить вас с таким элегантным доказательством. (Его придумали братья Мозеры. Просто взяли и предъявили 7 конкретных точек на плоскости и доказали, что даже эти 7 точек НЕЛЬЗЯ закрасить тремя разными цветами. Значит, всю плоскость и подавно нельзя ими раскрасить. Эти семь точек образуют замысловатую конструкцию, похожую на два веретена, нижние концы которых соединены, а прочие два конца связаны веревочкой длины 1 (понятно, почему 1?). С тех пор в жаргоне математиков появилось звучное выражение **«Веретено братьев Мозеров»**).

Сейчас я покажу, что на самом деле нужно хотя бы 4 цвета.

Предположим, что мы можем раскрасить плоскость в 3 цвета. Тогда любой правильный треугольник будет разноцветным (в смысле окраски своих вершин), а значит, у ромба из двух таких треугольников (рис. 105) две противоположные вершины окажутся одного цвета. Вот и получилось первое веретено!

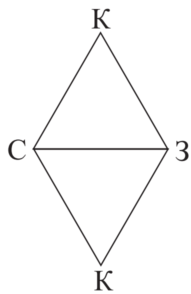

Рис. 105. Веретено. Будем вращать его вокруг нижней точки «К».

Повернем ромб вокруг одной из вершин ровно настолько, чтобы расстояние между второй вершиной и между новым положением второй вершины стало равным 1 (см. рис. 106).

На рис. 106, строго говоря, ребра нам вообще не нужны, а нужны только 7 вершин. Ребра нарисованы только для лучшего понимания идеи доказательства. Раскрасим вершины правого веретена с помощью цветов К, С, З (мы предположили от противного, что тремя цветами можно правильно раскрасить вершины «двойного веретена») (см. рис. 105). Если нижняя вершина окрашена цветом «К», то и противоположная вершина левого веретена должна быть покрашена цветом «К». Так как горизонтальное верхнее ре-

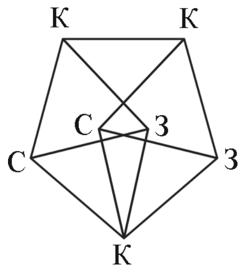

Рис. 106. Веретено братьев Мозеров. Длина всех ребер равна 1. Конструкция содержит 7 вершин (точки кажущегося пересечения на оси симметрии вершинами не являются).

бро нарочно выбрано так, чтобы длина его была равна 1, то нарушается основное условие закраски. Теорема доказана от противного.

Человечество научилось красить плоскость в 7 цветов; ни в 6, ни в 5, ни в 4 оно красить плоскость не умеет и не знает, возможно ли такое.

Андрей Михайлович Райгородский, который очень любит эту проблему, считает, что возможно покрасить плоскость в 4 цвета. Но это пока никаким *абсолютным доказательством* не подтверждено.

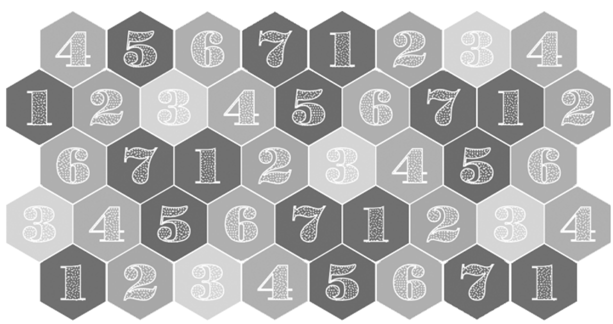

Рис. 107

Чтобы покрасить в 7 цветов, делается (рис. 107) 6-угольное замощение плоскости (шестиугольный паркет). Подбирается размер 6-угольника и предъявляется аккуратная раскраска.

С этой задачей связана еще одна проблема. Посмотрите на рис. 106 не как на схему соединения вершин «двойного веретена», а как на карту некоего 5-угольного острова, на котором расположились 9 различных государств (каждый связный кусочек, даже самый маленький, является государством). Стало быть, на географической карте этого острова каждое из государств надо было бы, по-хорошему, закрасить своим собственным цветом. Но государств на свете имеется ужасно много, а количество цветов, различаемое человеком, ограничено. Да и при изготовлении карты полиграфисты хотели бы иметь сильно ограниченный набор цветов (резко отличающихся друг от друга). Возникает чисто математический вопрос («проблема четырех красок»):

Можно ли любую карту на плоскости раскрасить в 4 цвета так, чтобы страны, имеющие общую границу ненулевой длины, были разных цветов? Или нужно 5 цветов? (То, что 3 цветов мало, довольно быстро показывается на примере.)

Вопрос: можно ли карту 5-угольного острова раскрасить 2; 3; 4 цветами? (см. рис. 106).

Проблема четырех красок решена в 1976 году. Путем длиннейшего компьютерного перебора, который увенчал длинное математическое рассуждение, было доказано, что четырех цветов хватает для любой карты на плоскости. Даже математическая часть была столь сложна, что всерьез взялись за ее проверку только через 10 лет. Несколько «дырок» нашли, но все они были успешно «залатаны».

Чтобы застраховаться от ошибки в компьютерной части, написали две полностью независимые программы — ни о какой ручной проверке речи быть уже не могло. Наконец, в 1990-х годах первая часть тоже была автоматизирована, а в 2000-х всё доказательство целиком было записано на формальном языке и верифицировано программой Coq (представьте себе, есть такая программа, которая верифицирует формальные доказательства!).

Следующий набор проблем связан с **простыми числами** и с делимостью.

Что такое простое число? Простое число — это такое целое положительное число, которое делится только на два числа: на себя и на единицу. Простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...

Еще Евклид знал, что простых чисел бесконечное количество. Но, тут есть одно «но». Заметили, что простые числа любят появляться парочками через один. Например, 11 и 13, или 41 и 43. Такие числа назвали «близнецами». (Числа 2 и 3 «близнецами» не называют, потому что это единственный случай, когда расстояние между соседними простыми числами равно единице — кстати, почему?) Нерешенная проблема заключается в том, что никто не знает, бесконечно ли множество простых «близнецов».

Если мы перебираем подряд простые числа, то то и дело встречаем пары близнецов. Так вот, никто не может доказать, что какая-то конкретная пара «близнецов» последняя, или что таких пар бесконечное количество.

С удалением от нуля простые числа встречаются всё реже и реже. В конце XIX века Адамар и Валле-Пуссен доказали закон распределения простых чисел. Согласно этому закону, у произвольного числа от 1 до n в районе большого натурального числа n шанс оказаться простым равен $\frac{1}{\ln n}$.

Функция «логарифм» постепенно растет, поэтому данная дробь постепенно убывает, стремясь к 0, то есть вероятность встретить простое число падает вплоть до нуля.

ПРИМЕР. Пусть $n = 20$. Тогда шанс встретить простое число среди первых 20 натуральных чисел равен $\frac{1}{\ln 20}$, что примерно равно $\frac{1}{2{,}996} = 0{,}3338$. Значит, ожидается, что среди первых 20 чисел простых будет $20 \cdot 0{,}3338 = 6{,}676$. На самом деле их ровно 8.

А вот простые «близнецы» встречаются не регулярно — более нерегулярно, чем сами простые числа. Разрыв между ними то маленький, то большой. Вопрос: стремится ли к нулю минимальный разрыв? В 2013 году было доказано, что нет.

Следующая проблема. Если вы перебираете четные числа, то их можно разбить на два слагаемых: $6 = 3+3$, $8 = 3+5$, $10 = 3+7$. Всегда получается представить четное число в виде суммы двух простых:

$$22 = 11 + 11, \quad 36 = 19 + 17, \quad 66 = \text{«напишите сами, какие»},$$

и так далее.

Пока все четные числа, которые смог проверить компьютер, удалось разложить в сумму двух простых. Гипотеза И. М. Виноградова состоит в том, что любое *четное* число можно представить в виде суммы двух простых чисел. Виноградов доказал, что любое нечетное число можно представить в виде суммы 3 простых чисел. *А вот про четные пока не могут доказать.*

Совершенные числа

Сколько совершеннолетий в жизни человека? Многие думают, что одно — 18-летие. На самом деле совершеннолетий в жизни человека — два! Это «6-летие» и «28-летие». Потому что числа эти — «совершенные».

Что же такое *совершенное число*? Совершенное число — это число, которое равно сумме своих делителей, меньших, чем само это число. Какие делители у числа 6, считая единицу, но не считая его самого? 1…

Подсказка из аудитории: 1, 2, 3.

А.С.: Мы видим, что $1 + 2 + 3 = 6$. Какие делители у числа 28? 1, 2, 4, 7, 14. Всё. И снова выполняется равенство такого же типа:

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.$$

В жизни человека ровно два совершенных возраста, потому что следующее совершенное число равно 496.

У математиков есть тост на совершеннолетие. Они, правда, празднуют 28, а не 18 лет. Тост всегда такой: «Чтоб тебе дожить до следующего совершеннолетия». Но вроде как никому еще не удавалось.

Так, а в чём же загадка? Априори совершенными числами могут быть как четные числа, так и нечетные. Более того, все четные уже описаны.

Над этим потрудились *Евклид* и *Эйлер*. Первый обратил внимание на следующую изящную формулу: $2^{p-1}(2^p-1)$ (произносится она весьма своеобразно: *«два в степени (пэ минус один) умножить на [(два в степени пэ) минус один]»*). Буква «пэ» означает некоторое простое число. Первый множитель можно раздробить на самые мелкие из возможных множители (равные двум). А второй множитель хотелось бы взять таким, чтобы его вообще нельзя было раздробить, то есть в виде простого числа. (Я думаю, Евклид рассуждал именно так. Если когда-нибудь повстречаюсь с ним, непременно спрошу его об этом.) Вот и высказал Евклид такую гипотезу:

Если число (2^p-1) простое, то число $2^{p-1}(2^p-1)$ — совершенное.

И что вы думаете? Так оно и оказалось! А потом за дело взялся Эйлер и доказал теорему посложнее: **любое** четное совершенное число можно записать в таком виде. Чтобы вас немного «попугать», давайте проверим формулу Евклида при $p=13$. Получается четное число 33550336. Странные цифры, правда? Кто не верит, что это число совершенное, проверьте.

А с нечетными не всё так хорошо. Когда я учился в маткляссе, у нас были листочки с задачами. *И вот на одном листочке была задача с тремя звездочками:* «Докажите, что нечетных совершенных чисел не существует».

Я посидел дома денек, другой. Пришел в школу и говорю учителю: «Что-то... я не могу доказать, честно...» *А он мне в ответ:* «А... Да, это никто не может доказать! Я на всякий случай дал. Вдруг кто-нибудь решит...»

Вот такая проблема! Существуют ли нечетные совершенные числа? Компьютеры пока перебирают варианты. Если компьютер найдет, то проблему снимут. А если не найдет, то надо доказывать, что их не существует. В конце этой темы я хочу задать задачу-шутку (а решение — не шутка): бывают ли совершенные числа, которые в десятичной системе записываются одними семерками?

Напоследок две решенные недавно задачи.

Возьмем *много-много одинаковых* шаров. Начнем приставлять *их друг к другу* с разных сторон (в пространстве).

Сколько *одинаковых* шаров можно приставить вплотную к одному шару такого же размера? Она называется задачей Ньютона. Ньютон очень долго переписывался с Д. Грегори. *Ньютон* был уверен, что *можно приставить только 12 шаров*, а Грегори утверждал, что 13. В результате доказали, что 13-й шар *чуть-чуть* не влезает. Ну, разумеется, возникает естественный вопрос, а в 4-мерном пространстве сколько шаров влезет? Задача решена в 2013 году нашим соотечественником О. Мусиным. Он еще жив и вполне себе в рабочем настроении. То есть в 4-мерном пространстве она решена, а в 5-мерном, кажется, еще нет.

А теперь, наконец, **Гипотеза Пуанкаре.**

Что мы знаем о нашем мире? Во-первых, что он 3-мерный. *Во-вторых, у него нет края.* Края в том смысле, в котором его воспринимает таракан, подползая к краю стола. *Мир везде одинаковый.* То есть таракан ползет по сфере или по бесконечной плоскости. А люди «ползают» по трехмерной сфере или по бесконечному пространству (а где именно — надо бы уточнить).

А еще наш мир ориентированный. То есть что бы вы ни делали в этом 3-мерном мире, ваша правая нога никогда не станет левой.

Исследования в области теоретической физики (так называемые уравнения космологии Фридмана и других ученых) не исключают того, что наш мир конечен. Можно даже представить себе, что сверхдалекие звезды, которые видны справа и слева от Земли — это одни и те же звезды. И, может быть, мы сможем увидеть на небе Землю, улетая от нее вертикально вверх, долго-долго летя и возвращаясь на эту же Землю с другой ее стороны! Это трудно себе представить, но такая гипотеза не противоречит современным научным данным.

Наше пространство, возможно, является искривленным, то есть служит примером нетривиального *трехмерного многообразия*. Может ли к нему быть применена гипотеза Пуанкаре, доказанная Перельманом? Вернемся к «двумерным мирам». Если я беру камеру от колеса (рис. 108), продеваю в него нитку и завязываю, то я никогда не смогу ее снять. А если я завяжу нитку на сфере, я сниму ее без проблем. Всё, что нам осталось предположить про наш мир, чтобы применить к нему гипотезу Пуанкаре, это принять на веру, что в нашей вселенной «трюк с завязыванием петли» не пройдет, и любую петлю можно стянуть. Описанное свойство поверхности — сферы, но не камеры! — носит название *односвязности**.

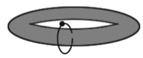

Рис. 108. Пусть наш Космос имеет форму «бублика», только не двумерного, а трехмерного, расположенного в пространстве более высокой размерности. Как бы могли подтвердить этот факт земные космонавты? По наличию «дыры» в этом бублике.

Так вот, если наш трехмерный мир конечен и односвязен, то мы попадаем в условия теоремы Пуанкаре — Перельмана. И тогда он обязательно является 3-мерной сферической поверхностью 4-мерного пространства-шара.

Обычная сфера радиуса 1 задается уравнением: $x^2+y^2+z^2=1$.

А 3-мерная того же радиуса вот так: $x^2+y^2+z^2+k^2=1$. (Подумайте, почему координат на единицу больше, чем размерность!)

Раньше это была гипотеза Пуанкаре и относилась она только к топологии. Теперь это — **теорема** Пуанкаре — Перельмана. И теперь ее можно пытаться применять в космологии.

*На самом деле ориентируемость поверхности, и вообще любого топологического пространства, является следствием односвязности, но это уже сложнее.

Раздел II

«Знание геометрии артиллеристу и инженеру необходимо, а каждому, кто только чему-нибудь учиться хочет, нужно; сия наука есть истинное основание всем наукам в свете, она научает нас здраво разсуждать, верно заключать и неопровергаемо доказывать; она сохраняет нас от многих заблуждениев, ибо геометристу труднее какое-нибудь предложение доказать обманчивыми доводами, нежели философу.

Эвклидовы элементы суть основании сей несравненной науки — необходимо учащимся предлагать должно, и стараться, чтоб они их знали совершенно...»

Всеподданейший доклад генерал-фельдцейхмейстера графа П. И. Шувалова об учреждении при артиллерии шляхетного кадетского корпуса с классом военной науки (1757 г.)

Лекция 1

А.С.: Сейчас мы рассмотрим несколько сюжетов. Некоторые мы разберем сразу, а некоторые — оставим и потом к ним вернемся.

Первый сюжет называется **фотосъемка**.

Давайте представим себе такую ситуацию: на прямой дороге расположено несколько контрольных пунктов (КП). Над этим отрезком дороги непрерывно идет аэрофотосъемка (рис. 109).

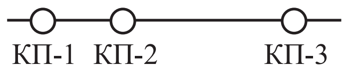

Рис. 109. Участок усиленного наблюдения.

И вот однажды сверху засекли шпиона (рис. 110).

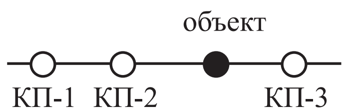

Рис. 110. «Возле самой границы овраг. Может, в чаще скрывается враг!»

Требуется понять, где конкретно он находится на дороге. Из визуальных соображений ясно, между какими двумя КП находится шпион, но нам нужна точная координата. Мы видим только фотоснимок. Мы можем запросить некоторое количество информации, например, мы можем запросить координаты некоторых КП. Вопрос: сколько координат нам для этого достаточно запросить. Задача вполне практическая. Фотосъемка — достаточно сложное преобразование, относящееся к *проективным.*

Что это такое? Давайте немного разберемся (см. рис. 111).

При фотографировании происходит перенос каждой точки местности вдоль лучей по направлению к точке съемки. Прямая, конечно, переходит в прямую при таком проецировании. Но вот соотношения отрезков-расстояний становятся другими.

Ясно, что одной координаты для опеределения местоположения недостаточно. Фокус в том, что двух координат тоже недостаточно.

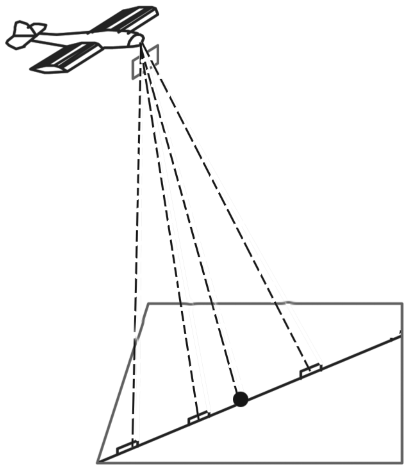

Рис. 111. Схема аэрофотосъемки. Два четырехугольника — это область, снимаемая на фотопленку (внизу), и границы кадра фотопленки (вверху). Эти две плоскости, как правило, не параллельны друг другу. Из-за этого искажаются соотношения расстояний между точечными объектами. Прямая внизу — охраняемая дорога, на которой расположены три КП (достаточно далеко друг от друга). Черный кружок указывает на место обнаружения подозрительного точечного объекта. Пунктирные линии изображают отраженные лучи света, исходящие от точечных объектов на дороге и фиксируемые на кадре пленки.

А вот три координаты — в самый раз. Потому что у этого преобразования — у проецирования — есть то, что математики называют **«инвариант»**.

Если вкратце сказать, «о чём» математика, то она о том, чтобы выявлять инвариантность ситуации. То есть какие-то соотношения, которые остаются неизменными. Вот вы так измерили (расстояния между КП), так сфотографировали, этак сфотографировали — некоторое соотношение координат точек на всех снимках будет одно и тоже. Я сейчас просто напишу, что остается неизменным. На самом деле это можно строго доказать.

На всех фотографиях, для любых фотоаппаратов неизменным остается так называемое *двойное отношение* «ДвОт» четырех точек (три из них — координаты КП, четвертая — координата подозреваемого в шпионаже). Оно выражается формулой

$$\text{ДвОт} = \frac{(z-x)}{(z-y)} : \frac{(t-x)}{(t-y)} \quad \text{(см. рис. 112)}. \tag{5}$$

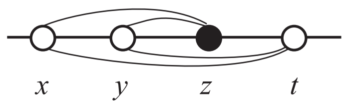

Рис. 112. Рассчитали число «z», и под кустом с такой координатой выловили подозрительного гражданина.

Если не знаешь, ни за что не угадаешь! Это число, которое можно взять и посчитать. Оно будет одинаковым и для местности, и для фотографии. Поэтому я запрошу координаты трех КП, потом вычислю соотношение на фотографии (на которой отражены и положения КП, и расположение неизвестного объекта), приравняю его к выражению с реальными координатами и точно определю реальную координату искомого объекта (а именно, число z).

Врезка 9. Как агент ДвОт ловит шпионов.

Обозначим через x, y, t координаты ближайших КП, в районе которых был замечен шпион.

Но тогда надо ответить на два вопроса: где находится начало отсчета, и какая будет единица измерения длины? Ответ: ЭТО НЕ ИГРАЕТ РОЛИ. В самом деле, двойное отношение координат (ДвОт) не изменится, если от всех четырех координат отнять одно и то же число; оно не изменится также, если все координаты умножить на одно и то же число. Поглядите на формулу ДвОт (формула (5)), и вы сразу поймете, почему это происходит. Итак, давайте запросим координаты точек x, y, t, измеренные в километрах до ближайшей погранзаставы. Допустим, они равны 17, 23, 32 соответственно. А как же мы найдем ДвОт, если «z» нам неизвестно? А вот так:

$$\text{ДвОт} = \frac{(z-x)}{(z-y)} : \frac{(t-x)}{(t-y)} = \frac{(z-17)}{(z-23)} : \frac{(32-17)}{(32-23)}.$$

А теперь внимательно изучим кадр аэрофотосъемки, где были зарегистрированы три КП и один Ш (шпион). Их координаты будем выражать в миллиметрах, а первое КП будем считать началом отсчета (для простоты). Обозначим эти четыре координаты за А, Б, С, Д (где, как мы решили, А = 0). Прочие (ненулевые) координаты мы просто измеряем с помощью миллиметровой линейки, приложенной к фотоснимку. Допустим, мы получили числа (0, 13 мм, 16 мм, 31 мм). Следовательно, мы можем найти ДвОт уже не в виде формулы, а в виде числа:

$$\text{ДвОт} = \frac{(16-0)}{(16-13)} : \frac{(31-0)}{(31-13)} = 3{,}097.$$

Приравнивая буквенное выражение ДвОт к его числовому выражению, получаем уравнение первой степени для нахождения «z»:

$$\frac{z-17}{z-23} \cdot \frac{9}{15} = 3{,}097.$$

Отсюда получаем $z \approx 24{,}4$ км.

После чего агент ДвОт сообщает начальнику погранзаставы, что подозрительного человека имеет смысл поискать на расстоянии 24 км и 400 м от заставы. Где он и был найден спящим под кустом, чтобы, дождавшись ночи, начать свою деятельность.

Свойства ДвОт станут понятнее, если рассмотреть следующий пример (рис. 113).

Здесь производится «одномерная» фотосъемка линии $ORST$ из точки K на «линию кадра» $OMNL$. Конечно, в реальной ситуации будет не линия, а плоскость кадра, и лежать она будет значительно ближе к точке K. Но суть дальнейшего исследования можно изложить и на таком условном рисунке.

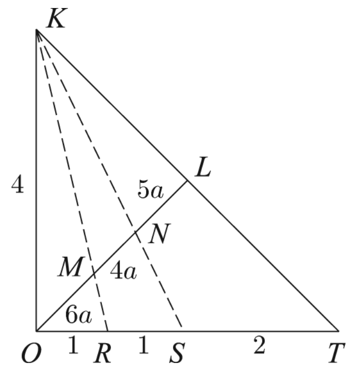

Рис. 113. Изображен прямоугольный равнобедренный треугольник KOT. Длина катета равна 4 единицы. Из прямого угла опущена высота OL на гипотенузу. Из верхней вершины треугольника K проведены две пунктирные линии KR и KS, делящие основание на отрезочки длиной 1, 1 и 2 ед. Основание треугольника лежит на плоскости, которую фотографирует самолет (рис. 111), вершина K — местоположение самолета, а высота OL лежит в плоскости, в которой находится кадр фотопленки (вторая плоскость случайно может оказаться параллельной первой; но гораздо чаще этого не случается). Точки пересечения линий KR и KS с высотой OL обозначены за M и N соответственно. Длины отрезков OM, MN, NK равны — $6a$, $4a$, $5a$ соответственно, где $a = \dfrac{2\sqrt{2}}{15}$ (для полноты картины!).

Прежде всего отметим, что если бы линия кадра была параллельна фотографируемой линии, то соотношение расстояний между точками O, R, S, T и точками O, M, N, L было бы одинаковым (и равным $1 : 1 : 2$), и никакого «двойного отношения» нам бы не понадобилось.

В случае же, когда параллельности плоскостей нет, произойдет искажение этого соотношения.

Вычислим, насколько сильным оно будет. Уравнения прямых KR, KS легко получить по формуле «уравнение в отрезках»:

$\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{4}=1$ (KR) и $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=1$ (KS).* Уравнение же высоты и того проще — оно имеет вид «$y=x$».

Поэтому мы легко находим координаты точек M, N: $M(4/5, 4/5)$ и $N(4/3, 4/3)$, а также обычное тройное отношение отрезков $OM:MN:NL=6:4:5$ (а не $1:1:2$, как было «на местности»). Можно теперь ввести координаты на прямой OL таким образом, что точка M получит координату 6, точка N координату 10, а точка L координату 15. При этом поменяется масштаб, но он на двойное отношение четырех точек влияния не оказывает.

Теперь мы убедимся, что «ДвОты» для точек O, R, S, T и для точек O, M, N, L будут СОВПАДАТЬ, несмотря на то, что обычные отношения для них не совпали.

В самом деле, для точек O, R, S, T ДвОт $=\dfrac{2-0}{2-1}:\dfrac{4-0}{4-1}=\dfrac{3}{2}$. Для точек же O, M, N, L ДвОт $=\dfrac{10-0}{10-6}:\dfrac{15-0}{15-6}=\dfrac{3}{2}$.

* * *

Теперь **второй сюжет**: построения циркулем и линейкой.

(В 11 классе я на экзамене по геометрии получил такое задание, что даже и циркулем пользоваться было нельзя. Третий сюжет, который мы рассмотрим, — это построение одной линейкой. Циркуль отменяется. Есть только линейка. Здесь всё еще веселее. Я расскажу про одну конкретную очень красивую задачу. Но об этом — ниже.)

Помните ли вы о построениях циркулем и линейкой? Построения циркулем и линейкой выводят на весьма сложные математические закономерности. Что мы умеем строить циркулем и линейкой? Можно, например, построить равнобедренный треугольник, если известны длина основания и длина боковой стороны.

Ну, скажем, основание 10 см, а боковые стороны — по 13 см. Линейкой проводим любую прямую, циркулем делаем на ней в любом месте засечку. Циркулем же измеряем основание (10 см) и де-

---

*Убедиться в том, что уравнения прямых KR и KS имеют такой вид, можно с помощью подстановки в уравнения координат точек K, R и K, S соответственно. Как известно, прямая однозначно определяется по любым двум своим различным точкам.

лаем на прямой вторую засечку, предварительно установив иглу циркуля в первую. Берем раствор циркуля равным длине боковой стороны (13 см) и ставим иглу циркуля сначала на левый край основания, проводя достаточно длинную дугу в верхней полуплоскости, а затем — на правый край (и проводим дугу до пересечения с первой дугой). Взяв линейку, соединяем точку пересечения дуг сначала с левой точкой основания, а потом — с правой (см. рис. 114).

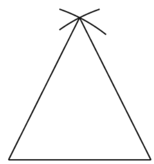

Рис. 114. Построение равнобедренного треугольника с помощью циркуля и линейки.

В общем, всё это быстрее сделать, чем описывать. Если Вы устали, вот вам **задачка**. Один школьник перепутал, что такое 10 см — основание или боковая сторона. И из-за этого построил не тот треугольник, что было нужно. Как вы думаете, что сильнее исказилось (в процентах) из-за рассеянности: площадь треугольника или его периметр? (Ответ: площадь изменилась больше, чем на 15 процентов, а периметр менее, чем на 10 процентов.)

Можно построить квадрат. А вот можно ли построить правильный пятиугольник с данной стороной? Это не очень просто. Но можно. Пифагорейцы уже умели строить правильный пятиугольник. Правильный шестиугольник построить совсем просто: строю окружность с радиусом, равным заданной стороне 6-угольника. Теперь делаю подряд 6 засечек на окружности окружностью того же радиуса. О чудо, шестая попадает прямо в то место, откуда мы начали. Так уж вышло! Далее прикладываем линейку к первым двум засечкам и проводим отрезок, их соединяющий. Потом то же делаем для следующих двух засечек, и т. д., пока не получим все 6 сторон шестиугольника (см. рис. 115). Итак, правильный шестиугольник построить просто. Треугольник — тривиально, квадрат — очень просто, пятиугольник сложно, но можно. Вопрос. Можно ли построить правильный семиугольник? Древние сломали миллион копий в спорах и потратили кучу часов, пытаясь решить эту задачу, но решена она была только в XIX веке!

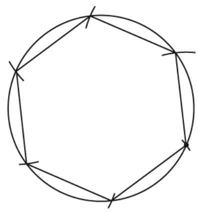

Рис. 115. О, чудо! Шестая засечка совпала с первой вершиной!

На самом деле, кроме этой задачи, древние оставили нам еще три **известные проблемы**.

1. Трисекция угла. Дан какой-то угол на плоскости. Надо разделить его на три равные части. Знаменитая проблема древних; примерно в том же начале XIX века было доказано, что трисекция угла с помощью циркуля и линейки невозможна.

2. Квадратура круга. Что значит «квадратура круга»? Дан круг. Нужно построить квадрат с такой же площадью. Пусть радиус круга r равен единице, тогда его площадь S равна π (по формуле $S = \pi r^2$). Значит, нужно построить квадрат со стороной, равной $\sqrt{\pi}$. Эта задача эквивалентна задаче построения числа π, которая тоже была решена (в отрицательном смысле), но только в конце XIX века. Почему она была решена позже, чем другие задачи, оставленные нам древними? Потому что люди очень долго не понимали структуру числа π. В начале XIX века было доказано, что можно построить те и только те точки плоскости, у которых обе координаты могут быть получены из единицы за конечное число операций плюс, минус, умножить, разделить, взять квадратный корень. Берете единицу. Вам разрешается ее складывать с самой собой. Так получатся все натуральные числа. Если будете вычитать — все отрицательные. Рассмотрим дроби. Дроби математики назы-

вают специальным термином — рациональные числа. То есть это числа, которые представляются в виде «целое делить на целое». Например, число 2 — рациональное, так как может быть представлено, как $\frac{2}{1}$ или $\frac{4}{2}$. То есть все целые числа также являются рациональными. Давайте посмотрим, где будут жить точки «целое число пополам». Во-первых, будут жить в целых, потому что любое целое, это как бы «удвоенное целое пополам». Во-вторых, они будут жить посередине между соседними целыми (рис. 116).

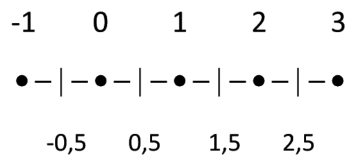

Рис. 116. Изображение чисел вида $\frac{m}{n}$ при $n = 2$. Если m четно, получаются целые числа (обозначены кружками). Все прочие числа такого вида изображены вертикальной черточкой.

А если я еще раз разделю пополам? Я могу нарисовать, где живут числа, полученные из целых делением на 3, на 5, на 1000 и т. д. Но удивительным фактом, который был известен уже древним, является то, что не все числа можно представить в виде дроби. Например, я построю квадрат со стороной 1 и возьму его диагональ. Ни одна обыкновенная дробь не равна длине диагонали квадрата. Заметьте, что число, равное диагонали квадрата, строится циркулем и линейкой (так как сам квадрат циркулем и линейкой мы построить можем).

Но оно не является рациональным числом. Это было помещено в первой части книги. То есть мы умеем теперь строить квадратные корни, потому что диагональ квадрата выражается квадратным корнем.

Любое рациональное число можно построить циркулем и линейкой. Давайте, например, построим $-\frac{11}{7}$. Знак минус просто означает, что число надо откладывать не вправо от нуля, а влево. Чтобы построить $\frac{11}{7}$, достаточно построить $\frac{1}{7}$ и отложить этот отрезок

11 раз. А чтобы построить $\frac{1}{7}$, придется использовать очень удобную *теорему Фалеса* (которая изучается в школе). Сейчас мы ею воспользуемся.

Теорема Фалеса (в простейшей формулировке). *Если на одной из двух прямых в плоскости отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные отрезки (рис. 117).*

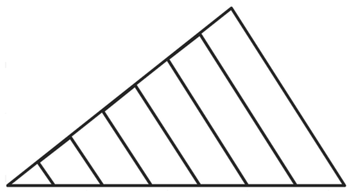

Рис. 117. Две прямые (горизонтальная и наклонная) выходят из начала координат и пересечены системой параллельных прямых. Если на одной из прямых мы отсекли равные отрезки, то на другой прямой отрезки тоже будут равны между собой (Теорема Фалеса).

Мне дан единичный отрезок. Отложу его по горизонтальной оси от начала координат и проведу произвольную наклонную прямую (тоже из начала координат) (рис. 117).

На этой прямой отложу от начала семь равных отрезков (неважно, какой длины) и конец последнего отрезка соединю с концом единичного (горизонтального) отрезка.

После этого провожу прямые, параллельные той, что соединила концы горизонтального (единичного) отрезка и наклонного отрезка, и проходящие через конец предпоследнего из семи отрезков; затем — через конец пред-предпоследнего, и так далее.

По теореме Фалеса получается, что все получившиеся на горизонтальном единичном отрезке кусочки равны друг другу — то есть мы получили $\frac{1}{7}$.

Корень строится немножко сложнее. Беру произвольное число a, которое я уже построил циркулем и линейкой и из которого я хотел бы извлечь квадратный корень. Откладываю справа от него единичный отрезок (рис. 118; для примера рассмотрен случай $a = 5$).

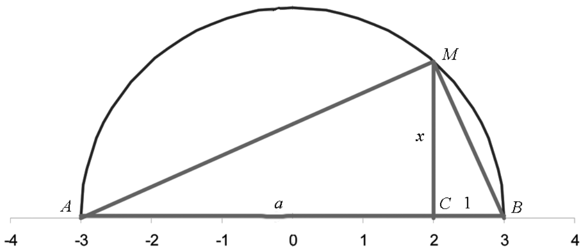

Рис. 118. Отрезок $a = 5$ отложен между $x = -3$ и $x = 2$; единичный отрезок — между $x = 2$ и $x = 3$. Строим полуокружность радиуса 3. Проводим перпендикуляр из точки $x = 2$ до точки пересечения с окружностью. Это и есть отрезок длины $\sqrt{5}$. Все три треугольника — прямоугольные, и все они подобны друг другу.

Теперь я рассматриваю новый отрезок длины $a+1$ как диаметр окружности. Делю его пополам (это мы делать умеем) и строю верхнюю полуокружность.

Из точки $x = 2$ (отделяющей отрезок «a» от отрезка 1) восстанавливаю перпендикуляр. Получаю отрезок с концами на окружности и отрезке.

Теорема: *длина полученного отрезка равна* $\sqrt{5}$.

Доказательство. Обозначим за A и B концы диаметра, за M и C — концы проведенного нами перпендикуляра (C ниже, чем M). Треугольник ABM подобен треугольнику AMC, так как у них острые углы совпадают, а один из углов — прямой. (Угол AMB прямой, как и любой угол, вписанный в полуокружность.) Значит, и третьи углы равны. По той же причине и треугольник ABM подобен треугольнику MBC. Значит, можно записать отношение катетов малых треугольников

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{a}$$

(где «x» — длина проведенного нами перпендикуляра); $x^2 = a$, $x = \sqrt{a}$, что и требовалось доказать.

Теперь мы умеем строить всякие страшные «многоэтажные чемоданы». Любое выражение, которое является результатом конечного числа операций плюс, минус, умножить, делить и взять квадратный корень, можно построить циркулем и линейкой. Например,

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{3-\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}}}}.$$

Основная теорема о построениях циркулем и линейкой утверждает, что верно и обратное: то есть если какую-то точку удалось построить циркулем и линейкой, то координаты этой точки должны быть получены с помощью конечного числа операций плюс, минус, умножить, разделить и взять корень. Но есть точки на прямой, которые таким образом не выражаются, а значит, и не строятся при помощи циркуля и линейки. Так, число π не является результатом конечного числа таких операций (ни миллиона, ни миллиарда!), и, следовательно, построить его невозможно. Доказательство этого факта придумали только в конце XIX века.

Более чем полвека назад, в начале XIX века придумали доказательство задачи о невозможности трисекции угла с помощью циркуля и линейки. Идея его такая. Если можно разделить любой угол на три части, то мы могли бы построить угол в десять градусов (так как угол в 30 градусов мы построить можем). Но тогда, конечно, мы могли бы построить отрезок, длина которого равна $\sin 10^\circ$.

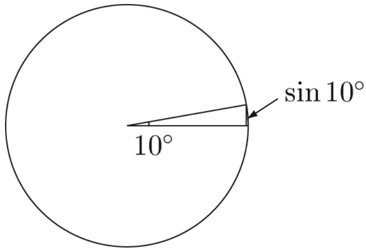

Рис. 119. $\sin 10^\circ$ построить нельзя. Это вам не какой-нибудь $\sin 72^\circ$!

Но доказано, что это число построить нельзя. (Если выразить $\sin 10^\circ$ через $\sin 30^\circ$, то получится кубическое уравнение, а для построения его решения необходимо уметь строить кубический корень. К сожалению, с помощью циркуля и линейки этого сделать нельзя.) Мы пришли к противоречию, значит, задачу о трисекции угла решить невозможно.

3. Третья великая задача древности — удвоение куба. Вам дан кубик. Нужно построить кубик вдвое большего объема.

Если у исходного куба сторона равна единице, то какая сторона у удвоенного куба? Объем исходного куба равен 1, значит, у удвоенного он равен 2. По формуле $V = a^3$ получаем, что сторона куба должна быть $\sqrt[3]{2}$. Поэтому задача, на самом деле, очень просто формулируется. Построить корень кубический из двух.

Сделать это циркулем и линейкой невозможно. По тем же соображениям, почему нельзя произвести трисекцию угла. (Как ни странно, число $\sqrt[4]{2}$ циркулем и линейкой построить можно! Угадайте, как?) Лет сто назад еще так мало было известно о числах, что математики не имели ответа на самые очевидные вопросы: например, иррационально ли число $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$?* Приходилось чуть ли не по отдельности перебирать такие числа и разбираться с ними.

*То, что этот вопрос «очевидный», конечно, является шуткой. Вопрос этот (в слегка усложненном виде) составляет одну из 23 знаменитых проблем Гильберта, сформулированных им в 1900 году. Ответ: это число является иррациональным.

Весьма трудным оказалось и число π, потому что до конца XIX века не было понятно, как оно устроено.

4. У четвертой великой проблемы, которая была оставлена древними, особенно интересная судьба. *Какие правильные многоугольники строятся циркулем и линейкой?* Про нее мы говорили чуть раньше и сейчас еще немного поговорим. Древние умели строить правильные треугольники, четырехугольники, пятиугольники, шестиугольники и их «производные». Например, десятиугольник или двенадцатиугольник. А вот семнадцатиугольник не умели. Его построил в 1796 году 19-летний (обратите внимание!) Карл Фридрих Гаусс. Процедура достаточно сложная. Не буду скрывать. Некоторый секрет состоит в том, что построение нельзя придумать, не зная, что такое комплексные числа. Комплексные числа — это такая волшебная палочка. У шаманов есть бубны, а у математиков — комплексные числа. Это такая числовая структура, которая помогает на ура решать задачи, кажущиеся нерешаемыми. Ну, при чем здесь комплексные числа, когда мы говорим о семнадцатиугольнике? Тем не менее семнадцатиугольник строится только с применением комплексных чисел. Впоследствии (в 1836 г.) Пьер-Лоран Ванцель выявил критерий возможности построения правильного многоугольника. Оказывается, строятся только такие правильные p-угольники (где p — простое число, то есть делится только на единицу и на себя), для которых «p» может быть записано в виде

$$2^{2^k} + 1 \quad (\text{где } k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Например, *простое* число 17 удовлетворяет этой формуле, если взять $k = 2$.

В заключение дам вам простую задачу. Докажите, что если есть некоторое простое число p и простое число q, и можно построить p-угольник и q-угольник, то можно построить и pq-угольник.

Наконец, вот **третий сюжет**, который мы рассмотрим: *построение одной линейкой.* Циркуль отменяется. Есть только линейка. Здесь всё еще веселее. Казалось бы, с линейкой многого не достигнешь: она может лишь соединять две уже данные точки прямой!

А ведь есть небезынтересные задачки. Например: на плоскости дана неравнобочная трапеция. С помощью одной линейки разделить пополам верхнее и нижнее основание этой трапеции. Здесь, кажется, совсем не за что ухватиться. Ну, проведем две диагонали в этой трапеции. Ну, продолжим боковые стороны трапеции до пересечения. Получили две новых точки. Ну, соединим их тоже. А дальше — что?

Оказывается, больше ничего. Последняя из построенных прямых аккуратно делит оба основания пополам. Да только как это доказать?

Докажем это «методом Декарта». Разместим эту трапецию в достаточно удобной системе координат на плоскости (рис. 120).

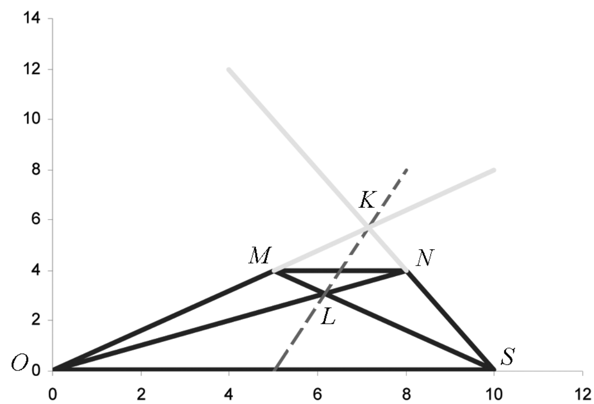

Рис. 120. Для решения задачи проведены 5 очевидных прямых, последняя из которых (пунктирная) как раз и разделит оба основания пополам.

Как следует понимать выражение «удобная система»? Ну, например, такая: весь объект целиком лежит в первой четверти, как можно больше вершин лежат на оси иксов, а одна из них является точкой $(0, 0)$. Сам объект задан при этом несколькими параметрами, через которые легко выразить различные части объекта, а также можно отразить некоторые особенности расположения частей объекта.

В нашем случае удобно нижним основанием считать то, которое длиннее (а равными они быть не могут — подумайте, почему?). Для примера, скос трапеции направим внутрь первой четверти. Боковые стороны не могут быть параллельными (почему?). Задать вершины трапеции (то есть 4 точки) можно четырьмя параметрами (хотя всего координат будет 8). Эти параметры обозначим a, b, c, d. А именно: a — смещение левой верхней вершины вправо; b — смещение правой верхней вершины относительно левой; c — расстояние от правой нижней вершины до начала координат; d — высота трапеции.

Как следует из рис. 120, для пояснения хода решения взято $a = 5$, $b = 3$, $c = 10$, $d = 4$. Мы докажем корректность нашего построения именно в этом случае. Можно провести рассуждения и в более общем виде, пользуясь буквенными обозначениями. Наметим план рассуждения.

Обозначая точку $(0, 0)$ буквой O, а прочие вершины буквами S, N, M (против часовой стрелки), назовем пока еще неизвестную точку пересечения диагоналей буквой L, а будущую точку пересечения продолжений боковых сторон — буквой K (см. рис. 120).

Тогда можно написать координаты вершин: $O(0, 0)$, $S(10, 0)$, $N(8, 4)$, $M(5, 4)$.

Легко понять, что уравнение прямой OM имеет вид $y = \dfrac{4x}{5}$, а прямой ON — вид $y = \dfrac{x}{2}$. Уравнения же прямых SN, MS можно получить по формуле «уравнение прямой по двум точкам», что при аккуратном исполнении (проверьте!) даст:

$$SN : y + 2x = 20; \quad MS : 4x + 5y = 40. \tag{6}$$

Решая одновременно два уравнения, задающие прямые ON и MS, получаем координаты точки пересечения диагоналей, то есть точки $L\left(\dfrac{80}{13}, \dfrac{40}{13}\right)$, в то время как одновременное решение уравнений, задающих прямые OM и NS, даст нам координаты точки $K\left(\dfrac{50}{7}, \dfrac{40}{7}\right)$.

Теперь всё готово для нахождения уравнения искомой «штрихованной прямой» KL. Получается уравнение $8x - 3y = 40$, которое при подстановке $y = 4$ и $y = 0$ даст абсциссы построенных точек. Они окажутся равными 6.5 и 5 соответственно и разделят оба основания нашей трапеции аккурат пополам!

Разобранная выше задача когда-то давалась на школьных олимпиадах примерно для 7 класса. Но когда «широкие массы абитуриентов и репетиторов» познакомились с методом ее решения, кто-то додумался, как ее «слегка изменить» и дать для 10 класса.

Задача. Дана неравнобочная трапеция. С помощью одной линейки разделить нижнее основание на 41 равную часть.

Решение этой задачи тесно опирается на решение предыдущей и вполне может быть найдено школьником 7 класса. Делим оба основания пополам, затем тем же методом — на 4 равные части. А потом на 8 равных частей, и т. д., пока не получим 64 равных части (и на верхнем, и на нижнем основании). После чего делаем замечательный трюк: на верхнем основании отсчитываем ровно 41 часть из 64 и проводим линейкой НОВУЮ БОКОВУЮ ЛИНИЮ. Получилась новая трапеция, у которой верхнее основание аккуратно разделено на 41 равную часть. Соединяем точки деления верхнего основания с точкой пересечения боковых сторон новой трапеции. Получится 40 прямых линий, продолжения которых аккуратно делят на 41 равную часть нижнее основание.

Видите, какие «волчьи ямы» нам готовят на олимпиадах. Но мне досталась еще более плохая. В ней даже не было точек, через которые можно провести прямые. Прямые надо было проводить *наобум*, но ответ при этом получить не «наобумный», а вполне конкретный.

Расскажу про эту очень красивую задачу. Я получил ее на экзамене по геометрии в 11 классе школы № 57. Мой учитель дал мне эту задачу: *нарисована окружность и дана точка вне этой окружности* (рис. 121).

Построить с помощью линейки касательную к окружности, проходящую через данную точку. Дальше случилось следующее: я нарисовал, как это делать, но, по некоторой причине, доказать

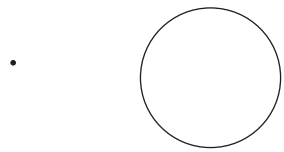

Рис. 121. Веди прямые «туда, не знаю куда» и построй касательную.

не смог. (О причине я вам скажу позже, это будет детективная история.) Я получаю за экзамен три балла, а учитель алгебры говорит: «Нет, наверное, у Савватеева было помрачение... давайте четыре поставим».

Давайте посмотрим.

Дана линейка, окружность и точка. Что делать? Можно провести несколько прямых, «секущих» окружность. Я провел три прямые «почти наобум» и получил шесть точек на окружности. Затем их накрест соединил и получил еще две точки (рис. 122).

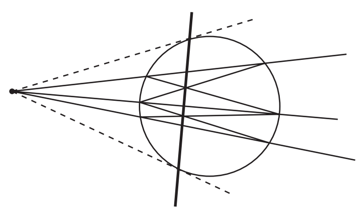

Рис. 122. И тут меня озарило!..

Дальше я соединил эти точки, и мне «внутренний голос» подсказывает, что точки, которые получились на окружности, как раз и есть точки касания.

— Да, — говорит мне экзаменатор, — это правильная конструкция. Докажи. Докажи, что это — точки касания.

Что такое касание в терминах геометрии? Касание прямой и окружности в терминах школьной геометрии означает, что прямая и (полная) окружность пересекаются в одной точке. Имеют одну общую точку. Как же это можно доказать? Сейчас я вам покажу такое доказательство, что у вас от него пойдут по коже мурашки. Но, во-первых, на экзамене я его не дал; а во-вторых, надо сделать предварительные пояснения, что такое «проективные преобразования» (не входящие в общеобразовательный курс обычной средней школы). Ну и, кстати, это же обоснование можно было сделать обычным «методом Декарта» (то есть, рассмотрев некоторую систему прямоугольных координат). Правда, при этом останется «за кормой» истинная красота решения этой задачи.

Врезка 10. Проективная геометрия — новый мир математики

Что такое «проекция», знают многие. Это — тень, которая отбрасывается на плоскость предметом, освещаемым точечным источником света — либо находящимся недалеко (и тогда лучи света, исходящие из него, расходятся), либо лежащим на бесконечном расстоянии (тогда лучи света параллельны). Пример для первого случая — свет небольшой настольной лампы. Для второго — солнечный свет. Однако тень от непрозрачного предмета может привести к заблуждению. Например, можно изготовить такой предмет, от которого тень, отбрасываемая вдоль оси X, имеет форму квадрата, вдоль оси Y — форму круга, а вдоль оси Z — равнобедренного треугольника. Чтобы изготовить такой предмет, возьмите деревянный цилиндр (с высотой, равной диаметру) и аккуратно стешите топором с двух сторон дерево так, чтобы снизу остался круг, а сверху он превратился бы в отрезок, по длине равный диаметру круга. Поэтому при практическом применении проективной геометрии возникает проблема, как рисовать пунктирные линии, чтобы лучше понять структуру изучаемого предмета и в то же время не сильно загромоздить чертеж этими линиями.

Когда математики попытались дать себе более ясное представление о том, что же такое есть «проекция», они ужаснулись. Оказалось, что тенью от окружности может служить не окружность, а эллипс («сплющенная окружность») и даже просто отрезок. И длина этого отрезка может быть больше диаметра окружности. Но это были еще только цветочки. Оказалось, что проекцией эллипса может оказаться... бесконечная кривая, называемая «ветвь гиперболы». Таким образом, понятие проекции неизбежно включало в себя *бесконечно удаленные точки* (и они спокойно могли переходить в обычные точки, и наоборот). Но тогда возник вопрос — в каком же «мире» мы изучаем проективную геометрию: на прямой, на плоскости, в пространстве? Ответ: не на прямой, а на *проективной прямой*. Она получается из обычной прямой добавлением одной новой точки: бесконечно удаленной. Казалось бы, от этого добавления прямая оказалась «еще более бесконечной» (ведь она была бесконечной и без добавления новой точки). Но, как выяснили топологи, полученный объект по своим свойствам совпадает с обычной окружностью. А ведь ее мы не считаем бесконечной!

Второй вопрос: а как теперь быть с плоскостью? ОТВЕТ: не с плоскостью, а с *проективной плоскостью*. Она получается из обычной плоскости «подклеиванием» к ней «бесконечно удаленной прямой», составленной из различных бесконечно удаленных точек. Так она, наверное, бесконечная? Нет, не бесконечная. Но очень необычная. Гуляя по проективной плоскости, можно совершенно незаметно перейти с одной стороны плоскости на другую. Точнее говоря, на ней НЕТ «одной» и «другой стороны» — сторона у нее только одна. Подумайте над этим! Допустим, гуляли по этой плоскости два совершенно одинаковых близнеца: Alexey Savvateev и Алексей Савватеев. Кто-то из них остался стоять на месте, а другой тем временем быстро пробежался по проективной плоскости и оказался с другой стороны — как раз под первым из близнецов. Представляете, как они жестоко поспорили — кто из них стоит нормально, а кто — вниз головой? ПОДСКАЗКА. Раз они живут на этой плоскости, то их рост (как и толщина проективной плоскости) равен 0 см.

Насчет *проективного пространства*. Вы уже догадались, что для его получения надо к обычному пространству «подклеить» бесконечно удаленную плоскость, состоящую из бесконечно удаленных точек. Во всех случаях при проективном преобразовании вновь добавленные точки могут спокойно переходить в старые точки, и наоборот. Они никак не отличаются друг от друга. Вы скажете: «Такого не может быть, потому что не может быть никогда! Как же можно одну перепутать с другой? Ведь прежние точки были близким к нам, а эта связана с бесконечностью, то есть очень далекая».

Так вот. В проективной геометрии НЕТ таких понятий, как «близкий» и «далекий». Ее выдумали для других целей. Так что все точки (в пределах понятий этой науки) одинаковы. Зато в ней есть свои важные понятия: прямая, плоскость, точка, двойное отношение и многое другое. Например, есть такое понятие, как КОНИКА. Что это за зверь? Это не один зверь, а сразу три — в нашей обычной геометрии они назывались «эллипс», «гипербола» и «парабола». А в этой геометрии они НЕРАЗЛИЧИМЫ.

И в заключение полезно сообщить важную информацию и важную теорему.

Информация. При проективном отображении одной проективной плоскости на другую проективную плоскость любые три точки, лежавшие на одной прямой, превратятся в три точки, ТОЖЕ лежащие на одной прямой.

Теорема. Для любых двух **четверок точек** A, B, C, D и M, N, P, Q (в каждой из четверок любые три точки **не лежат на одной прямой**) существует ровно одно проективное преобразование f, для которого $f(A) = M$, $f(B) = N$, $f(C) = P$, $f(D) = Q$.

А теперь как НАДО было решать эту задачу (построить касательную из точки к окружности одной линейкой, см. рис. 121).

Прежде всего, мы выходим из плоскости в пространство. Выбираем там еще одну плоскость. Я проецирую на нее мою картинку (рис. 123) из некоторой точки A. Причем точка A и новая плоскость расположены так, что прямая AO и эта плоскость параллельны. (O — это точка, в которой пересекаются три произвольно проведенные мною прямые, а также касательная, пока еще мною не построенная.)

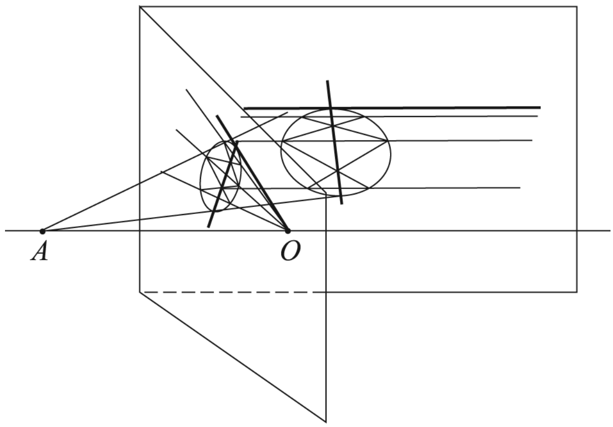

Рис. 123. Исходная картинка с гипотетическим построением касательной расположена в «левой» плоскости. Точка пересечения всех прямых на ней обозначена за «O». Точка A еще левее. Прямая AO параллельна правой плоскости, и в ней мы видим ту самую картинку, которая всё и объясняет.

Моя точка O уйдет на бесконечность, так как ей не найдется места на новой плоскости (для того мы и брали прямую AO параллельной новой плоскости), окружность превратится в эллипс, а все прямые, проходившие через точку O — в параллельные прямые. Их точка пересечения ушла на бесконечность, прямые не пересекаются, а значит, в геометрии Евклида они параллельны. (Мне, конечно, не могли дать эту задачу на школьном экзамене в рамках *неевклидовой* геометрии.)

А теперь смотрите, как все просто. Наша окружность с прямыми перешла в следующую конструкцию (рис. 124). На ней пучок параллельных прямых сечет эллипс. Требуется построить прямую того же пучка, касательную к эллипсу. Очевидно (и подробно обосновано в пояснении к рисунку), что построение, аналогичное сделанному мной, решает данную задачу.

Но свойство касания сохраняется при проектировании: раз прямая с эллипсом имеет одну точку пересечения, значит, на прообразе (то есть, на исходной плоскости) тоже должна быть одна общая

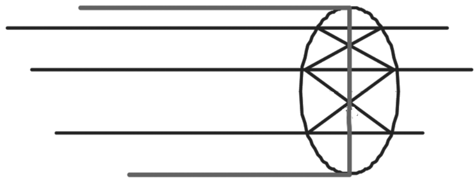

Рис. 124. На новой плоскости картина проясняется. Все пять прямых (здесь я провел обе касательные) теперь пересекаются в бесконечно удаленной точке (то есть, по-школьному, не пересекаются). Окружность превратилась в эллипс (а могла бы превратиться и в параболу; но нам этого не нужно). Точки касания находятся в самой верхней и в самой нижней точке эллипса. «Кресты» на этом рисунке стали симметричными, поэтому ясно, что их центральные точки, а также точки касания лежат на одной прямой. Значит, и прообразы этих точек лежали на одной прямой. Это и есть обоснование того метода решения, который я использовал в этой задаче.

точка. Следовательно, это точка касания. Теорема доказана.

Надо только выйти в пространство. Проектируете, превращаете в параллельный поток, и всё очевидно.

Почему же я не придумал в школе такое простое решение? Дело в том, что в 11 классе, в котором изучались проективные преобразования (а это — проективное преобразование), наша учительница литературы Зоя Александровна Блюмина решила набрать гуманитарный класс. Чем отличается гуманитарный класс от математического класса? Конечно же, количеством девушек. Понятно, что вся математика для 11 класса была отменена явочным порядком! Все бегали к гуманитарному классу, поболтать. Я всю проективную геометрию прогулял.

* * *

Давайте немножко разбавим проективную геометрию. В математике есть некоторое количество неожиданно прикольных задач! Они просто падают с неба. Я помню одну задачу, которую мне дали на олимпиаде в 7 классе. Задача про ученика, который сбежал с урока и плавает в круглом бассейне. Учитель его обнаружил в бассейне, подходит к границе бассейна с розгами в руках и говорит: «Я тебе сейчас всыплю. Сейчас ты только выйдешь из бассейна, и я тебе всыплю». А ученик отвечает: «Нет, Вы же не умеете по земле бегать быстрее меня. По земле я от Вас убегу». — «Конечно, ты от меня убежишь, но ты же где-то должен высадиться из воды на землю, правильно? Вот там-то я тебя и схвачу за шиворот и выпорю розгами». — «Ну да, если Вы сможете меня перехватить в момент, когда я буду вылезать из бассейна, то — да. Я вылезу в таком месте, где Вас не будет». — «Нет, ничего у тебя не выйдет». — «Нет, выйдет».

Условия задачи следующие: по земле быстрее бегает ученик; а пока он в воде, его скорость V в четыре раза меньше скорости бега учителя W, т. е. $V = \dfrac{W}{4}$.

Вопрос. Кто победит? Строгое решение, которое я придумал на олимпиаде, состоит в следующем. Нам дано, что скорость ученика в воде в четыре раза меньше скорости учителя на берегу. Давайте нарисуем окружность в четыре раза меньшего радиуса, чем бассейн. Ученик по этой окружности плывет ровно с такой же угловой скоростью, с которой учитель бегает по берегу (рис. 125).

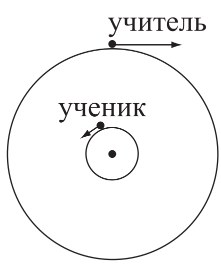

Рис. 125. Учитель пыхтит, ученик плывет не торопясь.

Если я еще чуть-чуть уменьшу окружность, угловая скорость ученика будет больше угловой скорости учителя. Тогда через некоторое время можно добиться того, что учитель и ученик будут на противоположных сторонах (рис. 126).

Рис. 126. Вот так и спасся ученик. А если бы бассейн был квадратный?

В этот-то момент ученик и рванет к берегу. Ему надо проплыть $\frac{3}{4}$ радиуса, а учителю пробежать π радиусов (так как это как раз длина полуокружности). Затраченное на это время равно $\frac{0{,}75}{V} = 4 \cdot \frac{0{,}75}{W}$ для ученика и $\frac{\pi}{W}$ для учителя. Но $4 \cdot 0{,}75 = 3 < \pi$. Значит, ученик спасется.

Как, кстати, можно доказать, что $\pi > 3$? Если я докажу, значит, ученик сможет убежать. Что такое «пи»? Это длина половины окружности единичного радиуса. Как можно эту длину пощупать?

Был такой древний грек Евклид. Он сформулировал несколько принципов работы с геометрией – пять *постулатов* (то есть правил, справедливость которых очевидна). Вот четыре из них: 1) между двумя любыми точками можно провести прямую, 2) любую прямую можно неограниченно продолжать в любую сторону, 3) из любой точки любым радиусом можно нарисовать окружность, 4) все прямые углы равны. В формулировке употребляется слово «равенство». Несмотря на то, что оно так просто звучит, это — чрезвычайно сложная математическая концепция.

Первые двадцать восемь теорем книги Евклида «Начала» были сформулированы и доказаны только с использованием четырех постулатов. Он чувствовал, что с пятым постулатом что-то не так. Сейчас я его сформулирую: *через любую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и только одну.* То есть прямую, которая не будет пересекать данную. У этого постулата длиннющая интереснейшая история.

Вернемся к числу π. Окружность — это кривая, соединяющая две точки. Так вот, по одной из аксиом Евклида, отрезок прямой, который соединяет две точки, короче любой кривой, их соединяющей. Рассмотрим вписанный шестиугольник. Каждая сторона правильного шестиугольника равна радиусу, то есть 1 (рис. 127).

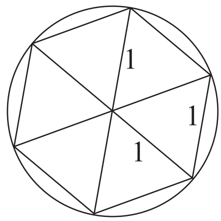

Рис. 127. Почему π больше трех.

Он дает нижнюю оценку для числа π. Число π больше суммы трех сторон шестиугольника. А это как раз три. Так что ученик точно спасется от учителя-преследователя.

Чтобы точнее оценить значение π, достаточно привести в пример какой-нибудь правильный вписанный многоугольник, у которого сумма половины сторон еще больше, например, правильный 8-угольник. Сейчас мы найдем сумму его 4 сторон. Тогда само число π должно быть еще больше полученного значения.

Правильный 8-угольник, вписанный в круг радиуса 1, может быть разбит на 8 одинаковых равнобедренных треугольников с единичными боковыми сторонами и с углом $45°$ между ними. Отсюда легко подсчитать (с помощью так называемой «теоремы косинусов») что сторона этого 8-угольника имеет длину $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Значит, сумма четырех его сторон равна $\approx 3,0615$. Следовательно, точное значение π превосходит $3,0615$.

А для того, чтобы оценивать число π всё точнее и точнее, нужно «увеличивать число сторон до бесконечности».

Рассмотрим еще один пример бесконечности. Будем суммировать числа, обратные к квадратам натуральных чисел:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\dots .$$

Эта сумма конечная по величине, но бесконечная по количеству слагаемых. (В отличие от суммы $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$, которая неограниченно возрастает по величине по мере увеличения количества слагаемых.) В принципе, оба утверждения совершенно неочевидны, так как мы не знаем, каким правилам подчиняются суммы с неограниченным количеством слагаемых. Сейчас я докажу, что сумма обратных квадратов натуральных чисел не может превышать числа «2».

Рассмотрим квадрат со стороной 1. Его площадь также равна 1. Теперь рассмотрим квадрат со стороной $\frac{1}{2}$, а площадью $\frac{1}{4}$ (рис. 128). Площадь следующего квадрата со стороной $\frac{1}{3}$ равна $\frac{1}{9}$.

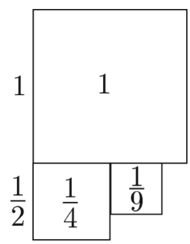

Рис. 128. Геометрический смысл исходной суммы.

Нам нужно слагаемое $\frac{1}{9}$, но я возьму с запасом. Вместо квадрата со стороной $\frac{1}{3}$ рассмотрю квадрат со стороной $\frac{1}{2}$. И, значит, с площадью $\frac{1}{4}$. Понятно, что если новая сумма будет конечной, то и исходная тоже должна быть конечной, потому что я увеличил третье слагаемое.

Что я сделаю дальше? $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{49}$ все заменю на $\frac{1}{16}$. От этого сумма опять увеличится. А что такое одна шестнадцатая? Это площадь квадрата со стороной $\frac{1}{4}$. Получаем 4 квадратика, так как мы поменяли четыре прежних слагаемых на четыре раза по $\frac{1}{16}$ (рис. 129).

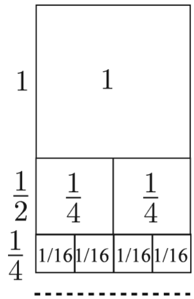

Рис. 129. Геометрический смысл увеличенной суммы. Как известно, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$.

Следующие восемь слагаемых я заменю на $\frac{1}{64}$. И они займут еще одну полосочку, вдвое меньшей ширины, чем предыдущая.

Следующие шестнадцать слагаемых — еще одна полосочка и так далее. Итоговая сумма вся, целиком, будет меньше, чем площадь двух изначальных квадратов. Потому что каждая следующая полосочка по ширине вдвое меньше предыдущей. Поэтому вся сумма не больше двух (рис. 129).

Но хотелось бы узнать, чему она на самом деле равна. Ее посчитал Леонард Эйлер. Один из величайших математиков в истории человечества. Он выяснил, что сумма обратных квадратов равна $\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$. И доказал это с помощью дифференциального и интегрального исчисления. Дифференциальное и интегральное исчисления совершают чудеса. Потому что дифференциальное и интегральное исчисления — это способ простого перешагивания через бесконечность. Как устроено доказательство? Примерно так: предположим, что сумма меньше $\frac{\pi^2}{6}$. Тогда она меньше на некоторую величину. Но этого быть не может: мы можем взять так много членов этой суммы, что разница между ней и числом $\frac{\pi^2}{6}$ была меньше любого наперед заданного числа, в том числе и этой величины. Про бесконечную сумму обычно показывают, что она не может быть больше какого-то числа по одним соображениям, и меньше — по другим. На самом деле в доказательстве используются намного более сложные соображения, связанные с математическим анализом, которые и показывают, что эта сумма в точности равна $\frac{\pi^2}{6}$.

Другая потрясающая страница развития математики связана **с пятым постулатом Евклида**. Евклид сформулировал пять постулатов. Но многие теоремы он доказал, не используя пятого постулата. Из-за этого геометры стали думать, что пятый постулат на самом деле не постулат, а теорема, и он должен следовать из предыдущих четырех. С античных времен до середины XIX века ученые пытались доказать это. Сначала пытались вывести этот постулат из других, а потом пошли от противного: допустим, 5-й постулат НЕВЕРЕН. Что из этого будет следовать? Некоторых ученых интересовал вопрос: может быть, нам только кажется, что через данную точку можно провести только одну прямую, параллельную данной. А на самом деле, если рядом через эту же точку нарисовать еще одну прямую (почти неотличимую от первой), она тоже будет параллельна данной (только мы этого не можем разглядеть) (рис. 130).

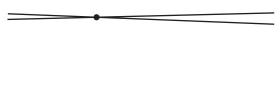

Рис. 130. Этот пятый постулат дал им всем прикурить!

Значит, если так, то должна быть какая-то непротиворечивая геометрия, в которой пятый постулат будет заменен на *альтернативный*. Например, что через данную точку можно провести как минимум две прямые, не пересекающие исходную. И вот ученые начинают пытаться привести к логическому противоречию такое предположение. И каждый из них, обнаружив какие-то необычные следствия, говорит: ну а это уже полный абсурд. Например, пятый постулат эквивалентен утверждению, что сумма углов треугольника равна 180°. И, если пятый постулат неверен, то в такой геометрии не существует ни одного треугольника с суммой углов, равной 180°. Ну, это же абсурд! Значит, — говорили ученые, —

всё доказано. Никто не замечал, что абсурд наступает исключительно из-за непривычности этих следствий, а не как логическое противоречие. Возьмите сферу и посмотрите, какая будет сумма углов у треугольника на сфере. Она всегда БОЛЬШЕ 180 градусов (нарисуйте треугольник на глобусе и убедитесь в этом! Только учтите, что «прямой» на глобусе является кратчайший путь, то есть «дуга большого круга»). Этот пример показывает, что логических противоречий в таком факте нет.

Следующий шаг работы математиков привел к эквивалентности пятого постулата и утверждения, что существует *хотя бы два подобных, но не равных друг другу треугольника.* Опять же, на сфере нет такого понятия, как «подобие фигур». Абсолютно нетривиальное утверждение про поверхность нашей планеты. Нарисуем два треугольника на поверхности земного шара, или на глобусе, например, треугольник Москва — Лондон — Иркутск и треугольник (Нью-Йорк) — (Лос-Анджелес) — (Рио-де-Жанейро). Если мы измерим углы у этих двух треугольников и, например, обнаружим, что они попарно равны друг другу, то и сами треугольники окажутся равными, то есть совмещающимися движением сферы — поворотом, отражением или их композицией*. А тогда и соответствующие стороны у них будут равными, то есть попарные расстояния между городами окажутся одинаковыми! (Разумеется в приведённоми выше примере это не так.)

Таким образом, на сфере (в частности, на поверхности Земли) справедлив **Признак равенства треугольников по трем углам**. Это можно доказать совершенно строго. (Почему же люди, — даже такие, как Евклид, — этого не замечали? Потому, что их жизненный геометрический опыт ограничивался наблюдением малых участков поверхности Земли — и они казались плоскими.) На сфере вообще много чудес. Например, на сфере, радиус которой равен 1, площадь треугольника равна сумме углов (в радианах) минус π. Вот такая вот теорема. Это всё очень красивые резуль-

*На самом деле можно показать, что *любое* движение сферы является либо поворотом, либо отражением.

таты сферической геометрии. То есть в «абы-как заданной геометрии» все привычные нам утверждения не обязательно верны. Была разработана целая наука, объединенными усилиями многих ученых было выведено *двадцать* утверждений, эквивалентных пятому постулату. Но никакого прямого (логического) противоречия в его отрицании не было. В начале XIX века Гауссу написал письмо венгерский математик Янош Бойяи. Он писал, что разработал геометрию без пятого постулата, не видит в ней никаких противоречий и спрашивал, что ему делать. А Гаусс ответил, что знает, что там нет противоречий, но сказать этого вслух нельзя, потому что «мы разворошим осиный улей, и нас искусают осы». Однако великий русский математик Николай Иванович Лобачевский, ректор Казанского университета, в 1829 году написал: «Геометрия, разработанная мною, не только не противоречива, а на самом деле всё именно так и происходит во Вселенной». Когда Гаусс узнал, что Лобачевский не побоялся и опубликовал свои результаты, он сразу предложил выбрать Николая Ивановича в иностранные члены германской академии наук и перестал скрывать свои разработки в этой области. Лобачевский построил геометрию с огромным количеством теорем. В частности, одна из теорем гласила, что сумма углов в ЛЮБОМ треугольнике меньше 180 градусов! Он даже пытался мерить углы между звездами, чтобы доказать, что сумма углов треугольника хоть чуть-чуть, да меньше ста восьмидесяти градусов. В одной из современных космологий всё именно так и устроено (но для проверки этого надо делать замеры не в масштабах Земли, а в гораздо больших масштабах). Итак, у любого треугольника в геометрии Лобачевского сумма углов меньше 180°. И площадь треугольника равна сто восемьдесят градусов минус сумма углов. То есть сферическая геометрия как бы «выпуклая», а геометрия Лобачевского — вогнутая. Современная топология многим обязана Лобачевскому, потому что он открыл этот «ящик Пандоры». *Подведем итог «поумнения» человечества в результате исследований 5-го постулата Евклида.*

Возможны три типа «геометрий»: 1) геометрия Евклида (сумма углов любого треугольника равна 180°); 2) геометрия того типа, который исследовал Лобачевский (в ней через точку, взятую вне прямой, проходит МНОГО прямых, не пересекающих данную; в любом треугольнике сумма углов меньше 180°); 3) геометрия того типа, который исследовал Риман (через точку, взятую вне прямой, не проходит НИ ОДНОЙ прямой, не пересекающей данную; в любом треугольнике сумма углов больше 180°).

И все эти геометрии логически непротиворечивы!

Лекция 2

А.С.: Сейчас мы вернемся к Евклиду. Он был не только геометром, но также еще доказал замечательный факт из теории чисел. А именно, что *простых чисел — бесконечное количество**.

Давайте сначала поговорим о том, как устроено математическое доказательство, и по каким канонам его можно создавать. Сейчас будет проведено классическое рассуждение от противного. Что такое «от противного»? Давайте представим, что наше утверждение — неверное. Что тогда? Тогда количество простых чисел конечно. Но если их конечное количество, их можно просто перечислить. Какое первое простое число?

Слушатель: Ноль.

А.С.: Нет. Ноль не является простым числом. Ноль вообще исключают при рассуждениях о делимости. На ноль не любят делить. Потому что, если вы делите на ноль что-то отличное от нуля, у вас не получится ничего. А если вы делите ноль на ноль, то у вас получится «сразу всё».

Что такое «разделить» одно число на другое? Скажем, что такое разделить 6 на 3? Это значит найти такое число, которое при умножении на 3 дает 6. Это число 2. А если вы 5 разделите на 3, получится дробное число, среди целых чисел его не найти. Содержательная теория делимости, в частности понятие простого числа, относится только к целым числам. Если вы рассматриваете все дроби, делимость совершенно бессмысленна. Потому что любую дробь можно разделить на любую, главное только на 0 не делить. Но если вы формально попробуете разделить, например, 5 на 0, то вы должны найти такое число, которое при умножении на ноль даст 5. Но вы явно не преуспеете в этом, потому что, какое бы вы число ни взяли, при умножении на 0 оно даст 0. Поэтому 5 на 0 разделить нельзя в принципе. А можно ли разделить 0 на 0?

---

*Напомним, что простым называется натуральное число, которо не делится нацело ни на какое другое число, кроме единицы и самого себя.

Нужно найти такое число, которое при умножении на ноль дает ноль.

Слушатель: Ноль.

Другой Слушатель: Любое.

А.С.: Любое. То есть ноль на ноль, формально говоря, можно разделить, но в результате получится любое число, это математикам тоже не нравится, поэтому решили договориться так, что на ноль *просто не делят.* А ноль можно разделить на что-нибудь?

Слушатель: На всё, кроме нуля.

А.С.: Да. И что получится?

Слушатель: Ноль.

А.С.: Только ноль. Да. Ноль можно разделить на что угодно, кроме нуля. В ответе всегда будет ноль.

Теперь число единица. Единицу тоже не считают простым числом, потому что на единицу делится любое число.

Итак, первое простое число — 2. Оно делится только на себя и на единицу. Больше четных простых чисел нет, потому что все остальные четные числа делятся на 2. Следующее простое число — это 3, затем число 5. Вот как выглядят первые простые числа:

$$P_1 = 2,\ P_2 = 3,\ P_3 = 5,$$

а далее

$$7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ \ldots, P_N.$$

Если утверждение Евклида неверно, то есть если простых чисел конечное число, то в какой-то момент выпрыгнет последнее простое число. Обозначим его за P_N. Получается, что количество простых чисел равно N.

Если Евклид неправ, то значит существует последнее простое число, а каждое из следующих чисел делится на какое-то из предыдущих простых чисел. Потому что если число делится на какое-то число, то оно и на простое число тоже делится, просто нужно делить, делить — пока не дойдете до простого. Давайте теперь составим произведение: $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot P_N$ (точка — знак умножения).

Если N имеет порядок, например, нескольких миллиардов, то в этом произведении стоит несколько миллиардов множителей, которые нужно друг на друга умножить. Но натуральный ряд так устроен, что к любому, сколь угодно большому числу можно прибавить 1.

Так что давайте посмотрим на следующее натуральное число:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot P_N + 1.$$

Оно не может делиться ни на какое из предыдущих простых чисел, потому что наше произведение от 2 до P_N делится на все предыдущие, а если еще единичку прибавить, то делимость сразу уйдет. Если что-то, например, на 3 делится, то следующее число уже на 3 не делится. Поэтому, число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot P_N + 1$ заведомо не может делиться ни на 2, ни на 3, ни на 5 и так далее... То есть оно всегда дает остаток 1 при делении на все простые числа. Оно нацело ни на что не разделится. Значит, оно простое. Противоречие. Следовательно, простых чисел бесконечное количество.

Некоторое время, правда, недолго, ученые думали, что таким образом можно получить рецепт изготовления простых чисел.

$2 + 1$ — простое число.

$2 \cdot 3 + 1$ — простое,

$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$ — простое,

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$ — простое,

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$ — простое,

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1$ — уже не простое (30031), так как оно делится на 59.

Рецепт не работает.

Мы знаем, что простые числа в натуральном ряду чисел встречаются в бесконечном количестве. А теперь вопрос, как они распределены? Можно ли тут какие-то закономерности установить? Насколько часто или редко они встречаются?

Рассмотрим такое произведение

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 100 = 100! \quad \text{(называемое «сто факториал»).}$$

100 факториал — это произведение подряд идущих натуральных чисел от 1 до 100.

Это — огромное число, его невозможно себе даже представить, но все-таки где-то в натуральном ряду оно есть. Следующее за ним число $100! + 1$, потом $100! + 2$. Это число будет делиться на 2. Потому что $100!$ делится на 2, и 2 делится на 2. $100!+3$ делится на 3, $100! + 4$ делится на 4 и на 2, $100! + 5$ делится на 5.

И так до ста. $100! + 100$ будет делиться на 100. Получается, что цепочка от $100! + 2$ до $100! + 100$ — из 99 натуральных идущих подряд чисел *простых чисел в себе не содержит.* Можно ли сконструировать то же самое, но для 1000 подряд идущих непростых чисел? Конечно. Берете $1001!$, то есть произведение всех чисел от 1 до 1001, прибавляете 2, 3, 4 и так далее до 1001. Вот вам 1000 подряд идущих чисел, среди которых нет простых. Значит, регулярности в проявлении простых чисел ожидать нельзя. Промежутки между соседними простыми числами могут быть сколь угодно большими. Можно ли сказать что-то про то, насколько маленькими они могут быть?

Слушатель: Единица — минимальный промежуток.

А.С.: Единица. Но она встречается только в самом начале, между 2 и 3. Потому что из двух соседних чисел одно обязательно четное, а значит — не простое (кроме случая 2 и 3). Получается, что минимальное расстояние между соседними простыми числами, начиная с числа 3, равно 2.

Вначале мы очень много видим этих «двоек» (то есть простых чисел, идущих через одно), потом они становятся всё реже и реже, и возникает вопрос: а кончатся ли эти «двойки» когда-нибудь? Будет ли момент натурального ряда, может быть, ужасно далеко от нас, когда появится последняя двойка соседних простых чисел, отличающихся на 2 единицы? Такие числа, кстати, называются близнецами: 29 и 31, 41 и 43, 71 и 73, 101 и 103. Будет ли момент, когда мы встретим последних близняшек, а между оставшимися простыми числами расстояние всегда будет не меньше трех (на самом деле четырех, потому что они заведомо оба нечетные)?

Это — нерешенная математическая проблема.

Я вам расскажу про одно маленькое «но», которое позволяет оптимистам утверждать о некотором прогрессе в решении этой проблемы. Чтобы вы сразу почувствовали, однако, насколько анекдотичен этот прогресс, выслушайте такую *притчу.*

В одной стране попытались доказать теорему: *У каждого мужа должно быть не более трех жен.* Долго не удавалось ее никак доказать. Наконец, дело сдвинулось с мертвой точки. Была доказана близкая к ней теорема: *У каждого мужа должно быть не более трех миллионов жен.* Ученые продолжают размышлять над этой проблемой.

Так вот. Специалисты по теории чисел решили взглянуть на «проблему близнецов» под похожим, так сказать, углом.

Может быть, можно сказать, что вот хотя бы на каком-то другом расстоянии d (превышающем двойку) уже можно гарантировать, что бесконечно много раз появятся соседние простые? То есть что расстояние между соседними простыми не будет уходить в бесконечность? До 2013 года это оставалось открытой проблемой даже в такой формулировке. В 2013 году математик Итан Чжан (Yitang Zhang) — китаец, работающий в США (как это часто случается с китайцами), доказал, что существует бесконечное множество пар простых чисел на расстоянии, не превышающем некоторого числа $d > 2$. Доказательство проверили: правильно, есть такое число d. Но единственное, что про него известно, — что оно не превышает 70000000 (см. вышеуказанную притчу). Как говорится, хотели рассматривать простые числа через окошко длиной в три единицы (2-трафарет) — не добились толку. А потом взяли трафарет побольше (70000000-трафарет), и получилось. Таким образом, здесь просматривается новое понятие «обобщенные простые числа-близнецы». Так что бывают 2-близнецы, бывают и 6-близнецы, ..., 70000000-близнецы. Проблема распалась на бесконечную серию проблем, и с какого-то места (то есть с какого-то числа d) она оказалась решенной положительно.

Ведь что такое трафарет? Это такая рамочка. Вот я беру трафарет длиной в 70000000, и в окошечко рассматриваю натуральный ряд, двигаясь вдоль него. Фиксирую моменты, когда внутри этого промежутка встречаются простые числа (более одного). Так вот, их будет бесконечное количество, этих моментов. Чжан доказал, что достаточно взять трафарет длиной в 70000000, чтобы поймать бесконечное количество простых обобщенных близнецов. Конечно, если я сделаю $d = 70000001$, тем более поймаю бесконечное количество этих обобщенных близнецов. А если возьму чуть меньше, например, 60000000, то уже точно сказать ничего нельзя.

Это — большой прорыв. Потому что в 1896 году Адамаром и Валле-Пуссеном было доказано, что частота появления простых чисел уменьшается. Рассказывают, что Адамар появился в этот день в кафе и сиял как медный грош. Друзья спросили его: «Что-то у тебя такое хорошее настроение, как будто ты доказал асимптотический закон распределения простых чисел». А он и отвечает: «Вы знаете, вы не поверите, но я именно это и сделал, и именно с этим и связано мое хорошее настроение».

«Да ладно», — говорят. Потом проверили и оказалось, что доказательство верно.

Почему это потрясает и почему это убедительно говорит о нерегулярности появления простых чисел? Потому что закон Валле-Пуссена и Адамара говорит, что между соседними простыми числами (в районе натурального числа n) в среднем расстояние равно $\ln n$ (*натуральный логарифм числа* n). Эта функция очень медленно растет, но тем не менее стремится к бесконечности с ростом числа n.

Потом долго пытались придумать *формулу для простого числа.* Ее искали очень долго и в какой-то момент переключились на доказательство того, что ее в принципе быть не может. А в 1976 году на основе решения российским математиком *Ю. В. Матиясевичем* десятой проблемы Гильберта был написан **конкретный** многочлен 25-й степени с целыми коэффицентами от 26 переменных. (В формуле использованы все буквы английского алфавита: a, b, c, d и так далее до x, y, z.) Про этот многочлен удалось доказать, что если подставить в него вместо букв целые неотрицательные числа и вычислить полученное значение, то всегда, когда результат будет положительным числом — оно обязательно будет оказываться простым.

Более того, до ЛЮБОГО простого числа «можно добраться» с помощью какого-то значения именно этого многочлена. Этот многочлен не может в полном смысле слова считаться «формулой для n-го простого числа», но является хорошей (и неожиданной) заменой этой формулы.

Но на этом дело не закончилось. В 2013 году открылась охота на *константу Чжана*. Это такое число, про которое уже удалось доказать, что на трафарете соответствующей величины, если его двигать по натуральному ряду, будет встречаться бесконечное количество пар простых. Вы не поверите, но к концу 2013 года 70000000 заменили на число 300, даже на 246. Так сказать, еще не доказали, что должно быть не более 3 жен, но доказали, что их не более 246.

И вот я этим 246-трафаретом еду по натуральному ряду, и бесконечное число раз считываю простые числа, которые попали в него. Более того, при условии доказательства некоторого факта, в который все верят, но еще не доказали, трафарет сократят до 12, а там и до исходной проблемы чисел-близнецов доберутся… 2500 лет люди ничего не знали про минимальное расстояние между простыми, полтора года назад* прорывной результат, снижение этой границы. И теперь гипотеза простых близнецов трещит по всем швам (впрочем, еще держится).

Еще немного про простые числа. Давайте рассмотрим ряд, который похож на ряды с бесконечным числом слагаемых, которые

*На момент конца 2014 года, когда читались эти лекции.

мы уже рассматривали:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\dots .$$

Я буду суммировать числа, обратные к простым. Как говорят математики, «сходится этот ряд или расходится»? Конечная или бесконечная сумма получится? Удивительный ответ состоит в том, что **бесконечная**. Это открыли в начале XIX века.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\dots=+\infty.$$

Какое бы число K вы ни взяли, можно указать такое натуральное число n, что, дойдя до члена с номером n, сумма ряда будет превосходить число K.

А если суммировать только обратные к простым близнецам, то сумма будет **конечна**. Это значит, что простых близнецов заметно меньше, чем всех простых чисел. Потому что если составить ряд из обратных простых, то он пойдет в бесконечность, а если составить ряд из обратных простых близнецов, то он будет конечным. И никто не знает пока, происходит ли это потому, что он где-то закончится и фактически эта сумма будет конечной, или из-за того, что простых близнецов бесконечное количество, но зазоры между ними быстро растут. Все математики, которые этим занимаются, верят, что простые близнецы никогда не кончатся. Но пока это все-таки остается гипотезой.

Расскажу заодно про еще одну нерешенную математическую проблему. Знаете ли вы, что такое совершенные числа? Что означает «мне исполнилось совершенное число лет»?

Слушатель: Это 18-летие.

А.С.: Нет, это вовсе не 18 лет! 18 — число несовершенное, а вот 6 и 28 — совершенные числа! Поэтому математических совершеннолетий в жизни каждого человека бывает ровно два — это когда человеку исполняется 6 лет, и затем — когда исполняется 28.

По определению, совершенное число — это такое число, которое равно сумме всех своих делителей, кроме себя самого. Например,

$6 = 1+2+3$, $28 = 1+2+4+7+14$. Следующее совершенное число — 496, но до этого возраста никто (кроме библейских персонажей) еще не доживал.

Для четных совершенных чисел есть общая формула:

$$2^k(2^{k+1} - 1)$$

(где k обозначает произвольное натуральное число).

Правда, число такого вида совершенное тогда и только тогда, когда $(2^{k+1} - 1)$ — простое число. При $k = 1, 2, 4$ получаются как раз совершенные числа $6, 28, 496$, а при $k = 3$ — число 120, совершенным не являющееся (потому что число $2^{k+1} - 1 = 15$ в этом случае не является простым).

Тем не менее никто не знает, беконечно количество четных совершенных чисел или нет. Потому что никто не знает, бесконечно ли количество простых чисел вида $(2^{k+1} - 1)$, или же оно конечно.

Последняя задача называется проблемой Мерсенна, а сами простые числа вида $(2^k - 1)$ — простыми числами Мерсенна. Если мы поменяем в этом выражении знак минус на плюс, то получим также весьма интересную и важную, как мы увидим ниже, задачу — а именно, какие из чисел вида $(2^k + 1)$ являются простыми? К этой задаче мы вернемся ниже, а пока я расскажу кое-что еще про совершенные числа — конкретно, про *нечетные* совершенные числа.

Ровно 28 лет назад (совершенное число!)* я поступил в 57-ю школу. На уроках специальной математики мы решали задачки из так называемых *листочков*, в которых приводились только определения математических понятий и объектов, а все свойства объектов уже мы сами должны были доказать.

Так вот, в листочке номер 6 (совершенное число!), в задаче под номером 6 (sic!) речь шла о совершенных числах. Было дано их определение, а затем сформулированы три пункта: пункт 6(а) предлагал доказать, что любое четное число вышеуказанного вида является совершенным, если число $(2^{k+1} - 1)$ простое; пункт 6(б)

*Эта лекция была прочитана в 2014 году. Тем не менее здесь допущена ошибка — в 2014 году это было 27 лет назад!

шел со звездочкой, и в нём требовалось доказать, что других *четных* совершенных чисел не существует; и наконец, пункт 6(в) шел с тремя (!!) звёздочками, и в нём предлагалось доказать, что нечетных совершенных чисел не существует.

Никогда до этого ни в одном листочке не было задачек с тремя звездочками. Редкие задачки с двумя звездочками вызывали нездоровую конкуренцию математических самцов в нашем классе за то, кто быстрее решит очень сложную задачку и покрасуется перед немногими и потому особенно драгоценными для нас одноклассницами.

Увидев задачку с тремя звездочками, я бросил всё и два выходных подряд пытался ее решать.

Я исписал две общие тетради (кто постарше — помнит, что это такое!!!). В понедельник я шел в школу с опущенной головой, уже представляя себе Рому Безрукавникова, Сашу Сидорова или Сашу Стояновского у доски, взахлеб рассказывающими решение этой задачи.

Интернета в те годы не было. Поэтому неудивительно, что всё принималось за чистую монету. Саша Шень (один из моих учителей в школе 57) стоял у стола, народ потихоньку собирался. Я подошел к нему, швырнул на стол свои тетрадки и сказал: «Сдаюсь».

«Ничего удивительного, — ответил Саша, — это пока что нерешенная математическая проблема. Мы дали на авось — вдруг кто-нибудь из вас изловчится и решит?..»

С тех пор прошло много лет, а воз и ныне там — до сих пор неизвестно, существуют ли нечетные совершенные числа, или их нет совсем. Примера нет, но и доказательства несуществования — тоже нет. Конечно, компьютер перебирает уже лет 50–70 одно за другим и проверяет, но к *абсолютному доказательству* такая проверка будет иметь отношение только в том случае, если вдруг какое-то нечетное число и впрямь окажется совершенным.

Вернемся теперь к проблеме Мерсенна – точнее, к ее «близнецу». Про числа вида $(2^k + 1)$ (которые, кстати, использовал Гаусс при построениях!) известно довольно много.

Фокус состоит в том, что такое число простым может быть только в том случае, если k тоже является степенью двойки! И сейчас я это докажу.

Теорема. *Если число* $(2^k + 1)$ *— простое, то* $k = 2^l$*, то есть исходное число, имеет вид* $2^{2^l} + 1$*.*

Доказательство. Для доказательства нам потребуется один факт из школьной программы:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Вместо x можно подставить любое число. $2^3 + 1$, $3^3 + 1$, $4^3 + 1$ раскладываются на такие множители. На самом деле раскладывается любая нечетная степень плюс один, например, $x^5 + 1$:

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1).$$

А четную степень плюс один таким способом разложить не получится.

Предположим, что k не является степенью двойки. Это означает, что у него есть нечетный простой делитель. У каждого числа есть какие-то простые делители. У некоторых чисел есть нечетные простые делители, у некоторых нет. Если у кого нет нечетных простых делителей, значит, это число делится среди простых чисел только на 2. Потому что все остальные простые числа нечетные. Но если число делится среди простых только на 2, то оно, очевидно, есть степень двойки. Если же у него хотя бы один множитель будет нечетный, то я сделаю с ним следующее.

Предположим, что k не является степенью 2, тогда k равно некоторому нечетному числу p умножить на какое-то число t: $k = pt$.

Что же такое теперь $2^k + 1$?

$$\begin{aligned} 2^k + 1 = 2^{pt} + 1 = (2^t)^p + 1 = \\ = (2^t + 1)((2^t)^{(p-1)} - (2^t)^{(p-2)} + (2^t)^{(p-3)} - \ldots + 1). \end{aligned}$$

Я разложил $2^k + 1$ на множители, очевидно отличные от 1 и даже положительные, значит, простым оно быть не может.

Поэтому число 2^k+1 может быть простым только в том случае, если $k=2^l$ — степень двойки.

Пьер Ферма полагал, что все такие числа простые. Это была гипотеза Ферма. Он написал в свей тетрадке «мне кажется, что все эти числа простые». Он не был уверен, ему только казалось. Первое такое число: $2^2+1=5$ — простое. Следующее: $2^4+1=17$ — простое. Дальше, $2^8+1=257$ — простое, $2^{16}+1=65537$ — простое.

Однако уже следующее число такого вида оказалось составным. Ферма ошибся. Но, вообще, Ферма обычно не ошибался. Есть такой принцип, «Ферма ни разу не обманул»*. Все утверждения, которые он сделал с пометкой *«это удалось строго доказать»*, впоследствии были доказаны. Он не оставлял доказательств, предлагая поверить ему на слово. Однако, в этом конкретном случае он написал: «мне кажется». И таки нет: $2^{32}+1$ раскладывается на множители. Единственным исключением из «правила Ферма» была великая теорема Ферма, ее никак ни могли доказать. Но потом она тоже перестала быть исключением. Ее тоже доказали. Проблема только в том, что то доказательство, которое сейчас существует, ни при каких условиях не мог выдумать сам Ферма. Оно содержит настолько сложную математику, которую Ферма не мог знать. Но ведь могло быть, что Уайлз (доказавший Великую Теорему Ферма в 1993–1994 годах) «ехал из Москвы в Питер через Киев», а Ферма ехал напрямую. Никто этого не знает наверняка!

Давайте вернемся к числам $n=3,5,17,257,65537,\ldots$. Их назвали *простыми числами Ферма.* Они замечательны тем, что такие правильные n-угольники строятся циркулем и линейкой. Первый нетривиальный из них, 17-угольник, построил ещё Гаусс. А затем Ванцель доказал следующую общую теорему: правильный n-угольник может быть построен с помощью циркуля и линейки в том и только том случае, если в разложение числа n на простые множители (единственное, в силу Основной Теоремы Арифмети-

---

*Согласно другим источникам, наоборот, Ферма сформулировал целый ряд неверных «теорем».

ки!) входят только степени двойки, а также простые числа Ферма: $n = 2^k p_1 p_2 \ldots p_r$, где все простые числа p_l имеют вид $p_i = (2^{2^l} + 1)$.

Этой теоремой Ванцель вплотную подобрался к современному разделу математики, который называется «теория полей». Математики очень любят такие интересные объекты: поля, группы и кольца. Каждое из этих слов носит строгий математический смысл, совершенно не тот, который они носят в разговорном русском языке. Еще есть термин «идеал», и даже такое понятие, как «кольцо главных идеалов».

А сейчас будет рассмотрена одна старинная проблема. Она описана Диофантом в одном из шести сохранившихся томов его произведений: **найти все прямоугольные треугольники с целыми сторонами.**

Итак, есть прямоугольный треугольник (см. рис. 131). Согласно теореме Пифагора, доказанной геометрическим путем в первой части книги, отношения между сторонами a, b, c такого треугольника задаются формулой

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Таким образом, нам нужно найти все целочисленные тройки a, b, c, удовлетворяющие данному квадратному уравнению. При решении этой задачи мы будем пользоваться одной школьной *формулой сокращенного умножения*, а именно формулой

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Давайте докажем эту формулу геометрически (аналогично тому, как в первой части книги мы доказали геометрическим путем саму теорему Пифагора).

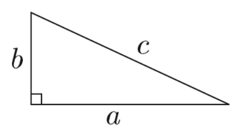

Рис. 131

Прежде чем приступить к решению этой задачи, давайте немного отвлечемся и вспомним формулу сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Давайте докажем тождество $a^2 + b^2 = c^2$ геометрически.

Нарисую квадрат со стороной a. И вырежу из него квадратик со стороной b.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

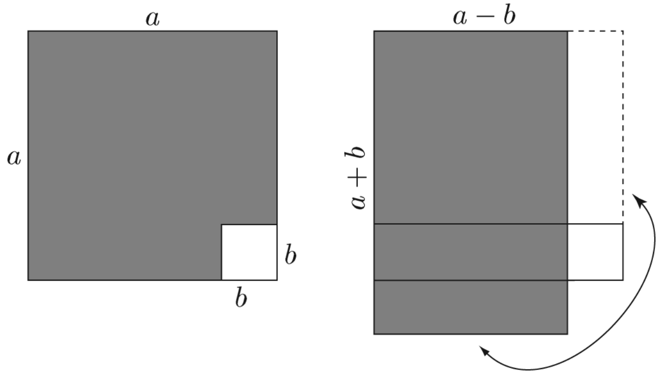

Рис. 132. Формула сокращенного умножения «в картинках».

Я хочу узнать, чему равна остающаяся площадь? Для этого я отрезаю прямоугольник и приставляю его снизу. Получаю прямоугольник со стронами $a - b$ и $a + b$ и площадью $(a - b)(a + b)$.

Итак, с одной стороны оставшаяся площадь равна $a^2 - b^2$. С другой стороны $(a - b)(a + b)$. Значит, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Тождество доказано.

А что такое прямой угол?

Слушатель: 90 градусов.

А.С.: А если кто-то прилетел с Марса, как ему объяснить, что значит «прямой угол»?

Есть безупречное определение прямого угла. Это такой угол, который, если вырезать его из бумаги и приставить к самому себе, даст развернутый угол (рис. 133).

Рис. 133. Слева — исходный угол, справа — приставлена к нему копия этого угла, вырезанного из бумаги. А внизу получилась сплошная прямая линия. Как говорится, ясно даже марсианину...

Развернутый угол — это прямая. Прямой угол — это половина развернутого угла. Это выводит нас на очень интересный вопрос: что имел в виду Евклид, когда писал, что все прямые углы равны между собой? Что такое «равны»? Есть одно очень важное понятие — *движение.* Движение — преобразование, которое сохраняет расстояние между парами точек. Мы всегда можем померить расстояние между точками на плоскости. Потом мы можем плоскость поворачивать, отражать, двигать — главное, чтобы расстояние между точками не менялось. Так вот «равны» — это всегда означает «совмещаются движением».

В 1872 году знаменитый немецкий математик Феликс Клейн выступил с так называемой «Эрлангенской программой». Он сказал, что геометрия — это наука о том, какие свойства фигур не меняются при «разрешенных преобразованиях». В частности, школьная геометрия — это наука о том, какие свойства фигур не меняются при движениях. Но преобразования бывают и более общего рода: растяжение, инверсия. Есть много разных преобразований. И высокая геометрия, геометрия Лобачевского, сферическая геометрия — это всё примеры того, как мы следуем Эрлангенской программе Клейна. То есть геометрию можно охарактеризовать как науку о свойствах фигур, которые не меняются при преобразованиях.

Я хотел охарактеризовать прямоугольные треугольники. Эта задача, несмотря на то, что ее полностью решили еще в античном мире, — не самая простая. Вы быстро найдете несколько примеров целых сторон, для которых верно $c^2 = a^2 + b^2$. Ну, скажем, вот $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$:

$$9 + 16 = 25.$$

Давайте посмотрим, сможем ли мы угадать еще какие-нибудь тройки? Посмотрим на картинку, которую тоже должны изучать в школе (в древнегреческой школе она была!).

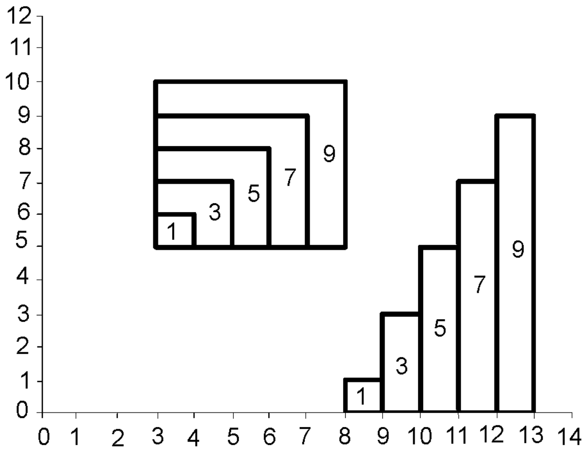

Рис. 134. Справа — столбики различной высоты (по-гречески «гномоны»). Высота измеряется числом клеточек, помещающихся в столбик, и указана внутри них. Каждый гномон, начиная со второго, «заворачиваем» на 90 градусов (слева). Его площадь от этого не изменится! Вот и получилось доказательство замечательной теоремы: «Сумма нечетных чисел от 1 и до $2n - 1$ равна n^2».

Картинка на рис. 134 помогает понять тот факт, что сумма $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots$ на любом шаге вычислений дает квадрат натурального числа. Одновременно это — способ увидеть, чем отличаются друг от друга два соседних квадрата. А именно, два соседних квадрата всегда отличаются на нечетное число.

Но нечетные числа тоже иногда бывают квадратами, например, 9 — это 3^2.

Значит, в момент, когда между соседними квадратами слой состоял из 9 квадратиков, у нас очевидным образом появилось решение соответствующего уравнения Диофанта.

Подобным же способом можно получить бесконечное множество таких троек. Все эти тройки будут иметь следующий специальный вид: $(a,\ b,\ a+1)$. Здесь b — нечетное число, обладающее тем свойством, что в изогнутой полоске между квадратом размера a на a и квадратом размера $(a+1)$ на $(a+1)$ умещается ровно b^2 маленьких квадратиков (см. рис. 135).

То есть между a^2 и $(a+1)^2$, между этими квадратами, иногда разница будет являться квадратом. И именно тогда, когда нечетное число будет случайно оказываться квадратом, будет появляться новая тройка решений уравнения Диофанта.

Какое следующее нечетное число будет квадратом? 25. Давайте посмотрим, чему равна тогда разница между соседними квадратами. На сколько клеточек отличаются a^2 и $(a+1)^2$? На $2a+1$.

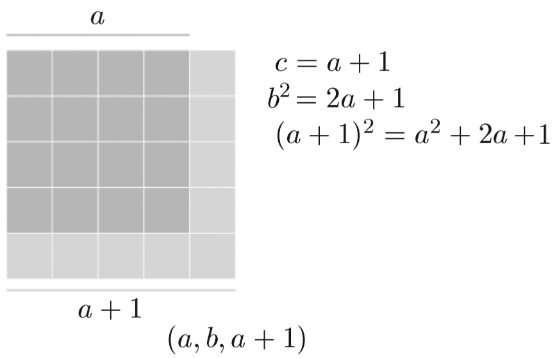

Рис. 135. Поиск одной серии решений уравнения $a^2 + b^2 = c^2$.

Теперь мы хотим, чтобы $2a+1$ было равно этому нашему числу 5^2, то есть 25,

$$2a + 1 = 25, \quad a = 12.$$

Итак, мы получили новую тройку: $12^2 + 5^2 = 13^2$. Без сомнения, ведь $144 + 25 = 169$.

Следующий нечетный квадрат — 49. Появится решение 24, 7 и 25.

Кто-нибудь из вас спросит меня: «Может быть, это всё?» Мы получили бесконечный ряд решений уравнения $a^2+b^2 = c^2$ в целых числах. Но они все устроены одинаково. Гипотенуза отличается от большего катета на 1.

Вопрос: а есть какие-нибудь другие решения? Ответ: да. Очень много других серий. Вот вам одно из решений, устроенных иначе: 84, 187, 205.

Общая формула для всех решений — это отдельная история.

Лекция 3

А.С.: Сейчас мы немного вернемся к теореме Ферма и Диофанту с его тринадцатью томами. Шесть сохранившихся томов, как я уже рассказывал, были изданы, после чего попали в руки Ферма. Ферма читал труд Диофанта и оставлял замечания на полях книг. Так вот, в том месте, где Диофант полностью разбирает классическую задачу о прямоугольных треугольниках, рукой Ферма была на полях сделана заметка: «В то же время никак нельзя разложить куб в сумму двух кубов». На нашем языке это звучит так: уравнение вида $x^3 + y^3 = z^3$ не имеет решений в целых числах.

Далее у Ферма стоит запятая, и он продолжает: «Никакую четвертую степень — на сумму двух четвертых степеней, и вообще никакую фиксированную степень — в сумму двух таких же степеней». Далее он пишет восхитительную фразу, за которой математики гонялись 357 лет. Он пишет: «Я нашел тому факту поистине удивительное доказательство, но поля этой книги недостаточно широки, чтобы его вместить». Эта запись рукой Ферма была в экземпляре трудов Диофанта. Этот комментарий был единственным случаем в истории, когда утверждение Ферма не удалось доказать за разумный период времени, спустя 20–30 лет. Один раз Ферма ошибся, но он не утверждал определенно. В случае с простыми «числами Ферма» он написал «по-видимому, они простые». В случае с рассматриваемой нами теоремой Ферма написал, что нашел доказательство. Он упомянул об этом в 1637 г., а в 1994 г. ее доказали. Мы сидели на семинаре по алгебре. Пришел преподаватель и сказал: «У меня для вас потрясающая новость — доказана великая теорема Ферма». Все решили, что это розыгрыш, не может такого быть. Мы учимся на мехмате, и при нас происходит историческое событие. Если быть точнее, теорему доказал Эндрю Уайлз в 1993 г. Но затем в доказательстве им самим была найдена ошибка, которую Уайлз вместе с Ричардом Тейлором исправляли полгода. Поэтому окончательно теорема была доказана в 1994 году. Некоторое время были сомнения, и в 1996–1997 гг. не все были убеждены в том, что это свершилось, так как понять это доказательство могли лишь немногие из математиков. Сегодня можно утверждать, что понимают доказательство этой теоремы человек 500 в мире, детально — около 100 человек. Ежу понятно, что Ферма подобного доказательства выдумать не мог. Следовательно, или Ферма один раз ошибся, или мы до сих пор не знаем простого доказательства этой теоремы. Математики предпочитают соглашаться с первым утверждением, ибо второе позорно для всего человечества.

Ферма не оставил доказательства общего случая, но сохранились записи изящного доказательства для частного случая, для $n = 4$, гласящего, что уравнение $x^4 + y^4 = z^4$ не имеет нетривиальных решений в целых числах.

Я не буду приводить этого доказательства, хотя оно и не очень сложное. Оно использует приемы делимости, что возвращает нас к нашей первой задаче (найти все пифагоровы тройки).

Итак, **теорема Ферма:** уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в натуральных числах. Давайте посмотрим, каким может быть число n.

Это число можно разложить на множители. Есть такая теорема, называется *«Основная теорема арифметики»*, которая утверждает, что любое натуральное число можно единственным образом, с точностью до перестановки множителей, разложить в произведение простых чисел. Смотрим, делится ли n на 2. Делим, пока делится, получаем 2 в какой-то степени и оставшийся нечетный множитель. Если оставшийся множитель не простой, то мы раскладываем его дальше, пока не получим произведение простых чисел.

Например,

$$n = 2^m n_1 n_2 = 2^5 \cdot 17 \cdot 7 = 3808.$$

Почему процесс разложения на множители не может продолжаться до бесконечности? Каждый раз, когда мы раскладываем на множители, числа становятся всё меньше и меньше. Нельзя бесконечно долго уменьшать натуральное число. Это аксиома Архимеда, но для человека разумного это — очевидное утверждение.

Переименуем простые множители в p. Математики любят обозначать простые числа буквой p от английского «prime»:

$$n = 2^m p_1 p_2 p_3 \dots p_k.$$

Некоторые из множителей могут встречаться несколько раз. А может быть, у n есть какие-то другие множители, которые здесь не перечислены, и в результате оно одновременно равно какому-то другому произведению:

$$n = 2^m p_1 p_2 p_3 \dots p_k = q_1 q_2 q_3 \dots q_k.$$

Может ли такое быть, чтобы одно и то же число раскладывалось на простые множители «существенно по-разному» (несущественное отличие — например, $2 \cdot 3 \cdot 5$ и $3 \cdot 5 \cdot 2$)? Интуиция подсказывает, что нет, и интуиция права. Но доказать это аккуратно довольно сложно. Мы в это просто поверим и не будем проходить этой тернистой дорогой. Что же следует из единственности разложения на простые множители?

Есть два варианта. Либо у n есть хотя бы один нечетный простой делитель, то есть в записи:

$$n = 2^m p_1 p_2 p_3 \dots p_k$$

хотя бы одно p — нечетное. Второй вариант состоит в том, что ни одного нечетного числа нет. Поговорим сперва о втором варианте. Что можно сказать про n в этом случае? То, что n является степенью двойки. Если $n = 2$, мы получаем задачу про Пифагоровы треугольники, которую скоро решим в этой лекции. Если $n \neq 2$, то оно представимо в виде $4 \cdot k$. Высшая степень двойки – это либо 4, либо $8 = 4 \cdot 2$, либо $16 = 4 \cdot 4$ и так далее. Получаем следующее уравнение:

$$x^{4k} + y^{4k} = z^{4k},$$

но, как известно,

$$x^{4k} = (x^k)^4,$$

откуда получаем

$$(x^k)^4 + (y^k)^4 = (z^k)^4.$$

Если бы можно было решить это уравнение, то три натуральных числа x^k, y^k и z^k образовали бы решение задачи Ферма $x^4+y^4 = z^4$.

Но Ферма доказал, что такое уравнение не имеет решений в целых числах, строго больших нуля.

Поэтому случай теоремы Ферма для чисел n, являющихся какой-то степенью двойки, сводится к $n = 2$. В других случаях решений нет.

Вспомним, какой случай мы еще не рассмотрели: n содержит нечетный простой делитель p, $n \neq 1$ (кстати, 1 тоже является степенью двойки), то есть $n = pk$. Тогда:

$$(x^k)^p + (y^k)^p = (z^k)^p.$$

Получается, что если у n есть простой нечетный делитель p, то несуществование решения уравнения Ферма с показателем n сводится к несуществованию решения уравнения степени p.

То есть теорема Ферма сводится к исследованию уравнения простой нечетной степени. И если мы знаем, что ни при каком простом нечетном n уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решения, то оно не имеет решения и ни при каком другом $n \geqslant 3$. А теперь — история вопроса.

Про уравнение второй степени было известно уже древним индусам. Уравнение третьей степени оказалось более сложным. Почти полное решение, которое потом довели до конца, было получено Леонардом Эйлером. В лекции 4 я расскажу, каким изящнейшим путем доказывается теорема несуществования для некоторого уравнения третьей степени (не связанного напрямую с теоремой Ферма), но сначала про пятую степень:

$$x^5 + y^5 = z^5.$$

Неразрешимость уравнения пятой степени в целых числах была доказана в XIX веке. Потом стали увеличивать показатели и доказывать про седьмую, одиннадцатую, тринадцатую степени. Дошли примерно до сотни. Особо отличились женщина-математик Софи Жермен, а также Куммер, потративший на теорему Ферма добрую половину своей весьма долгой жизни (1810–1893).

При решении уравнения Ферма выделяют два разных случая: регулярный и специальный (нерегулярный).

Регулярный случай: ни одно из чисел x, y, z не делится на p. Специальный случай: одна из переменных делится на p, а две другие — нет. (Если две переменные делятся на p, то и третья переменная обязательно делится на p. Например, если x и y делятся на p, то в левой части p выносится за скобку, и z тоже будет делиться на p. Тогда можно сократить обе части уравнения на максимальную степень числа p и получить какой-нибудь из двух описанных случаев.)

Софи Жермен далеко продвинулась в регулярном случае. Она доказала, что уравнение регулярного типа $x^p + y^p = z^p$ не имеет решения для всех таких простых p (нечетных, то есть всех, кроме $p = 2$), что $2p + 1$ — тоже простое.

Весь XIX век длилась борьба за разные простые показатели, и методология доказательств была типовая. Выражения раскладывали на множители типа

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Если вы не помните эту формулу из школы, можете ее проверить, раскрыв скобки. Дальше незадача: $(x^2 - xy + y^2)$ на множители не раскладывается — по той же причине, по которой не раскладывается $x^2 + y^2$. А как было бы хорошо разложить его и в одну строчку получить решение! Но это возможно только с комплексными числами, а с действительными, привычными нам — это невозможно. Все дороги, которые ведут в настоящую математику — идут через комплексные числа. Это сложно, но интересно и красиво. К комплексным числам мы вернемся в конце этой лекции.

Сейчас я хочу доказать математически, что два вышеупомянутых выражения $x^2 + y^2$ и $x^2 - xy + y^2$ не могут быть разложены на множители. Для этого я использую сложный, но наглядный путь через введение в алгебраическую геометрию.

Докажем неразложимость x^2+y^2. Допустим, что его можно разложить на множители (где α, β, γ и δ — вещественные числа):

$$x^2 + y^2 = (\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y).$$

Рассмотрим, какие множества на плоскости задают правая и левая части уравнения:

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{и} \quad (\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) = 0.$$

После работ Декарта мы знаем, что x и y можно считать координатами на плоскости. Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ задает нам только одну точку $(0, 0)$. Почему? Потому, что квадраты не могут быть отрицательными. Если одна из переменных положительна, например x, то выражение x^2 больше нуля, но квадрат второй переменной — не меньше нуля, следовательно, сумма будет больше нуля. Не получается. Если сумма равна нулю, значит x и y оба равны нулю.

Рассмотрим второе уравнение:

$$(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) = 0.$$

Оно задает нам две прямые. Иногда они могут совпадать.

$$x^2 + y^2 = 0 \qquad\qquad (\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) = 0.$$

Рис. 136. Для левого уравнения получается всего одна точка, для правого — или две прямых, или одна.

Получается, что с одной стороны у нас две прямые (в случае их совпадения — одна), а с другой стороны — точка (см. рис. 136).

Если бы $x^2 + y^2$ раскладывалось на множители, то второе уравнение должно было бы определять то же множество на плоскости, что и первое. Но так как эти множества не совпадают, то сумму квадратов нельзя разложить на множители.

Вот вам пример методов классической алгебраической геометрии. Если я захочу изучать уравнение от трех переменных x, y и z, то получится уже трехмерное пространство. А если у меня 26 переменных? Нам понадобится 26-мерное пространство. Нужно иметь воображение и жить в многомерном пространстве. Представьте, что вы выходите на улицу и переходите дорогу на красный свет. Вас может сбить машина, но стоит вам перейти в четырехмерное пространство, и вам станут безразличны все светофоры, так как машины будут проезжать сквозь вас, и даже не будут замечать этого. А ведь вы сделали только один шаг по четвертой оси координат!

Немного сложнее доказать, что не раскладывается на множители $x^2 - xy + y^2$. Допустим, что

$$x^2 - xy + y^2 = (\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y).$$

Посмотрим на множество $x^2 - xy + y^2 = 0$.

Умножим всё на 4, затем преобразуем:

$$4x^2 - 4xy + 4y^2 = 0,$$
$$4x^2 - 4xy + y^2 + 3y^2 = 0.$$

Свернем $4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$ по формуле Бинома Ньютона.

Получим $(2x - y)^2 + 3y^2 = 0$.

Если сумма квадратов равна 0, значит, каждый из них равен 0. Значит, во-первых, $3y^2 = 0$, то есть $y = 0$. А во-вторых, $(2x - y^2) = 0$, то есть $2x - y = 0$, откуда в силу $y > 0$ имеем $x > 0$. То есть это уравнение задает точку $(0; 0)$. Но $(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y)$ по-прежнему задает две прямые (в крайнем случае, одну). Множества опять не совпадают. Значит, разложить $x^2 - xy + y^2$ на множители нельзя.

Зачем мы это делаем? Я снова сделаю переход от истории к математике.

Вернемся к $x^2 + y^2 = z^2$. Рассмотрим несколько способов решения этой задачи.

Первый способ решения называют «формулой индусов», т. к. полагают, что еще древние индусы знали это решение.

Давайте посмотрим, какие бывают варианты для четности или нечетности x, y и z? Если число четное, оно имеет вид $2k$, тогда его квадрат имеет вид $(2k)^2 = 4k^2$ и он делится нацело на 4. (В некоторых книгах факт делимости изображается так: $4k^2 \,\vdots\, 4$.)

Если число нечетное, то его можно представить в виде выражения $2k + 1$ для некоторого целого k, и тогда

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1.$$

$4(k^2+k)+1$ — не просто нечетное число. Это число, которое при делении на 4 имеет остаток 1.

Какие бывают остатки при делении на 4? 1 и 3 у нечетных чисел и 0 и 2 у четных. Так вот, выведенные формулы показывают, что у квадратов всегда остатки либо 0, либо 1. Например,

$$0^2 = 0, \quad 1^2 = 1, \quad 2^2 = 4,$$

то есть ноль при делении на 4, далее — 9, 16, 25, 36, 49 (с чередованием остатков 1 и 0 при делении на 4).

Тут есть еще один более глубокий «фокус-покус»:

$$(2k + 1)^2 = 4(k^2 + k) + 1 = 8\frac{k^2 + 1}{2} + 1 = 8\frac{k(k + 1)}{2} + 1,$$

где $\dfrac{k(k + 1)}{2}$ — всегда целое число. В числителе стоят два подряд идущих числа. Оно из них всегда четное, значит, это выражение делится на 2.

Получается замечательная вещь. Квадрат любого нечетного числа дает остаток 1 при делении на 8. Это — очень важный факт. Но в нашем случае важен остаток при делении на 4.

Вернемся к нашему уравнению

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{7}$$

(так как это — формулировка теоремы Пифагора, то такие прямоугольные треугольники со сторонами x, y, z, где x, y, z — целые числа, называются «пифагоровыми»).

Прежде всего сократим все на 2.

Делим на 2 все три числа, пока они синхронно будут делиться. Затем, заодно, разделим все три числа на все их прочие общие простые множители. Так мы опишем не все треугольники, а только качественно разные. Поясним сказанное, воспользовавшись понятием подобия треугольников.

Если два треугольника подобны, то тройки их сторон пропорциональны друг другу. Интересно в каждом семействе подобных друг другу пифагоровых треугольников найти самый маленький треугольник с целыми сторонами. Потом мы сможем умножить найденное решение (x, y, z) на любое целое положительное число. Треугольник увеличится, но останется пифагоровым.

У этого самого маленького треугольника не будет делимости ни на одно простое число у всех трех сторон одновременно. Но и длины двух сторон не могут делиться, например, на 2, иначе длина третьей стороны тоже будет обязана делиться на 2, так как выполняется равенство (7). Если делятся слагаемые, то делится и сумма, значит, можно сократить все три числа.

То есть у минимальных троечек из этих трех чисел на 2 может делиться только одно. Аналогично и на любое другое простое число может делиться длина не более одной из трех сторон.

Оказывается, что не подходит тот вариант, когда x, y, z — все нечетные числа. В самом деле, предположим, что все числа нечетные. x^2 — нечетное, y^2 — нечетное. Следовательно, z — четное (так как сумма нечетных чисел всегда четна). Значит, все-таки одно (и только одно) из x, y, z должно делиться на 2.

А могут x и y быть нечетными? Нет, потому что у квадратов при делении на 4 будет остаток 1, а их сумма даст остаток 2, но z — четное, поэтому его квадрат при делении на 4 должен дать в остатке 0. Значит, в любой пифагоровой тройке после ее максимального сокращения число z будет нечетным. Для примера возьмем тройку $(30, 40, 50)$. Она сводится к тройке $(3, 4, 5)$, где 5 — нечетное число.

Значит, одно число из x и y должно быть четным, другое — нечетным. Можно считать, что x — четное.

А теперь начинается ключевой момент доказательства, не очень сложный, но крайне важный, так как он работает при решении многих диофантовых уравнений.

Раз x — четное число, то $x = 2k$ при целом k. В этом случае уравнение будет иметь вид $4k^2 + y^2 = z^2$.

Перекинем y^2 направо: $4k^2 = z^2 - y^2$, то есть

$$k^2 = \frac{z-y}{2}\frac{z+y}{2}.$$

Так как z и y — нечетные числа, то их разность и сумма — четные числа. Поэтому $\frac{z-y}{2}$ и $\frac{z+y}{2}$ — целые числа.

Получилось, что k^2 равно произведению некоторых двух целых чисел.

А теперь смотрите, мы договорились, что достаточно искать такие тройки, в которых ни у какой пары чисел нет общих делителей. Поэтому y и z не имеют общих множителей, $y = p_1p_2p_3\dots p_a$, $z = q_1q_2q_3\dots q_b$, и эти наборы простых чисел разные. Как говорят математики, в этом случае y и z взаимно просты. Сами они при этом совершенно не обязательно простые. Например, $15 = 3\cdot 5$ и $22 = 2\cdot 11$, следовательно, 15 и 22 — взаимно простые числа, хотя ни одно из них не является простым.

Теперь я утверждаю, что $\frac{z-y}{2}$ и $\frac{z+y}{2}$ также взаимно простые, то есть не имеют ни одного общего множителя. Почему? Предположим, что у них есть общий делитель. Например, они делятся на 3. Тогда, их сумма и разность тоже делятся на 3. Но

$$\frac{z-y}{2} + \frac{z+y}{2} = z,$$
$$\frac{z-y}{2} - \frac{z+y}{2} = -y.$$

Получается $y \vdots 3$, $z \vdots 3$, то есть y, z *оба делятся* на 3. Мы пришли к противоречию. Значит, $\frac{z-y}{2}$ и $\frac{z+y}{2}$ тоже не имеют общих делителей.

Вернемся к нашему выражению

$$k^2 = \frac{z-y}{2}\frac{z+y}{2}.$$

Числа справа состоят из разных простых делителей. В каждое из чисел простые множители могут входить хоть поодиночке, хоть в степенях, но пересечений между разложениями $\frac{z-y}{2}$ и $\frac{z+y}{2}$ нет.

Например,

$$\frac{z-y}{2} = p_1^2 p_2^3 p_3 \dots p_k,$$
$$\frac{z+y}{2} = w_1 w_2 w_3^5 \dots w_m^7.$$

(Вместо 5 и 7 здесь могут быть любые степени.)

С другой стороны, $k^2 = q_1^2 q_2^2 \dots q_f^2$, поэтому

$$q_1^2 q_2^2 \dots q_f^2 = p_1^2 p_2^3 p_3 \dots p_k w_1 w_2 w_3^5 \dots w_m^7.$$

Согласно основной теореме арифметики, существует **единственное** разложение натурального числа на простые множители с точностью до порядка сомножителей. Значит, по обе стороны от знака равенства стоят наборы одинаковых простых чисел. В частности, q_1^2 равен произведению двух чисел из правой части.

Так как пересечений простых множителей в наборах $p_1, \dots, p_k$ и $w_1, \dots, w_m$ нет, то этот квадрат целиком «сидит» в одном из наборов. Но то же самое можно сказать и про все прочие квадраты! Поэтому все простые числа набора p_i входят в разложение числа $\frac{z-y}{2}$ в четных степенях, и то же самое верно для набора w_j. Следовательно, числа $\frac{z-y}{2}$ и $\frac{z+y}{2}$ **являются квадратами***.

Это очень сильное утверждение (потому что квадратов очень мало среди натуральных чисел). $1, 4, 16, 25, 36, 49 \dots$ — они встречаются все реже.

*Этот переход является психологически сложным. Подумайте над ним самостоятельно: квадрат — это такое число, в разложении которого на простые множители все простые числа входят в четных степенях.

Введем новые обозначения. Так как наши выражения — квадраты, то обозначим:

$$\frac{z-y}{2} = n^2,$$
$$\frac{z+y}{2} = m^2.$$

Тогда

$$k^2 = \frac{z-y}{2}\frac{z+y}{2} = n^2m^2,$$
$$z = \frac{z-y}{2} + \frac{z+y}{2} = m^2 + n^2,$$
$$y = \frac{z+y}{2} - \frac{z-y}{2} = m^2 - n^2.$$

Вспомним, чему равен x: $x = 2k$.

Видно, что $k = mn$, следовательно, $x = 2mn$.

Итак, мы доказали, что если x, y, z являются целыми сторонами прямоугольного треугольника (минимального в серии подобных пифагоровых треугольников), то существует пара целых чисел n и m с таким свойством, что x равен удвоенному произведению этих чисел, y — разности квадратов этих чисел, а z — сумме квадратов этих чисел. Это — обязательное условие:

$$x = 2mn,$$
$$y = m^2 - n^2,$$
$$z = m^2 + n^2.$$

Остается вопрос: можно ли брать m и n произвольным образом?

Во-первых, чтобы «y» было положительным числом, нужно чтобы выполнялось неравенство $m > n$ («y» — сторона треугольника, она не может быть отрицательным числом). Во-вторых, m и n **должны быть взаимно простыми числами разной четности**, чтобы x, y, z получились взаимно простыми.

Давайте проверим, останется ли верна наша формула для целых решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ при любых целых m, n:

$$x^2 + y^2 = 4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = \\ = (m^2 + n^2)^2 = z^2.$$

Мы видим, что наша формула всегда дает «пифагоровы» тройки, но не обязательно положительные и взаимно простые.

Общая формула содержит два произвольных параметра. Для наглядности построим сетку (рис. 137).

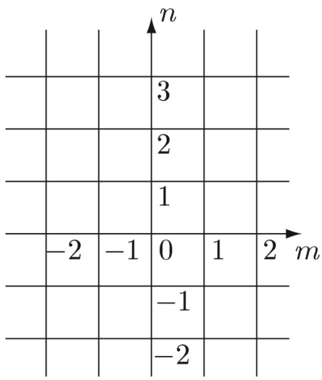

Рис. 137. Здесь спрятались все пифагоровы тройки!

В сетке — выберем точку с координатами $(0; 0)$ и оси: m — вправо, n — вверх. Будем брать точки с координатами $(m; n)$ и подставлять их в нашу формулу. Например, возьмем точку $(2; 1)$.

$$x = 2mn = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4,$$
$$y = m^2 - n^2 = 2^2 - 1^2 = 3,$$
$$z = m^2 + n^2 = 2^2 + 1^2 = 5.$$

Давайте возьмем что-нибудь более сложное. Напомню, что для получения минимальных пифагоровых троек нам подходят только $m > n > 0$ с разной четностью.

Возьмем, например, $(5; 2)$. Получим $x = 20$, $y = 21$, $z = 29$.

При подстановке мы увидим, что у нас появляются разные виды треугольников. Узкие вытянутые треугольники, у которых катет и гипотенуза отличаются на единицу: 12, 5, 13. Треугольники, у которых катеты почти равны друг другу: 20, 21, 29 (рис. 138).

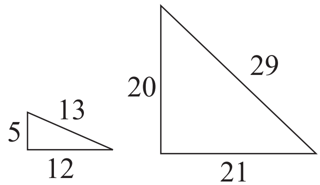

Рис. 138. Такие разные пифагоровы треугольники.

В каждой целочисленной точке плоскости будет возникать вариант пифагорова треугольника. Возьмем точку $(10;3)$ и посмотрим, какой треугольник получится:

$$x = 60, \quad y = 91, \quad z = 109.$$

Задача решена методом Диофанта. Мы получили описание всех пифагоровых треугольников.

Второе решение задачи о пифагоровых треугольниках.

Алгебраическая геометрия — часть 2.

Есть уравнение, которое нужно решить в целых числах, понимая, что по абсолютной величине c больше a и c больше b:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Разделим это выражение на c^2 и введем новые обозначения $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Обе скобки — числа рациональные, т. е. дроби.

Какая фигура на плоскости описывается уравнением: $x^2 + y^2 = 1$? Окружность единичного радиуса.

А теперь — чудо. Задача, которую мы решаем — найти на этой окружности все рациональные точки (т. е. точки, у которых обе координаты являются дробями). Вот как звучит наша задача при втором подходе к решению!

Какую точку на окружности даст нам треугольник 3, 4, 5? Точку $(3/5; 4/5)$. Стороны 20, 21, 29 породят точку $(20/29; 21/29)$. Для любой точки, которая попадает на окружность, сумма квадратов координат должна быть равна единице. Но не любая из этих точек *рациональна.*

Нужно найти все такие точки. Возьмем одну очевидную рациональную точку с координатами $(0, -1)$.

Слушатель: А почему не $(0; 1)$ или какую-то другую?

А.С: В принципе, можно выбрать какую угодно точку окружности. Я выбрал такую точку, при которой формулы будут выглядеть проще всего.

Давайте предположим, что есть еще одна рациональная точка (x, y). Тогда прямая, которая проходит через эти две точки, имеет уравнение с рациональными коэффициентами (см. рис. 139). Докажем это.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

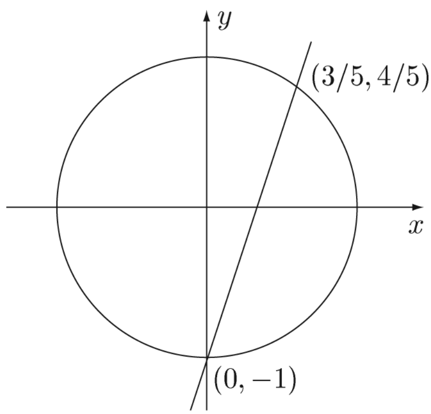

Рис. 139. Прямая, проходящая через точку $(0, -1)$ и еще одну рациональную точку, обладает рациональным коэффициентом наклона.

Давайте посмотрим, как выглядит уравнение прямой, проходящей через точку $(0, -1)$ в общем случае. Вспомним, что $y = kx + b$ — уравнение прямой «с угловым коэффициентом и свободным членом».

Если она проходит через точку $(0, -1)$, то при подстановке $x = 0$, $y = -1$ в наше уравнение мы должны получить верное равенство. Подставим: $-1 = 0k + b$, откуда $b = -1$, то есть наше уравнение имеет вид $y = kx - 1$.

Мы получили общий вид прямой, проходящий через точку $(0; -1)$. При разных k мы будем получать прямые с разным наклоном (рис. 140).

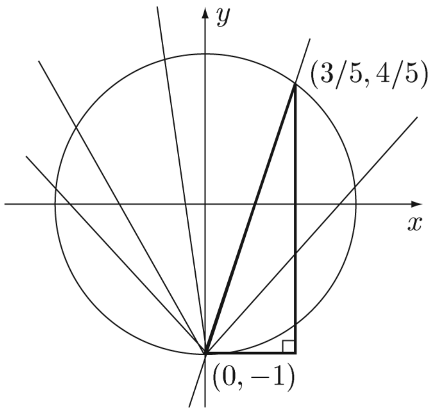

Рис. 140. Обратите внимание на вспомогательный прямоугольный треугольник справа с вершиной в точке $(0, -1)$.

Если точка (x, y) рациональна, то k — тоже рациональное число (k — это тангенс угла наклона прямой, в нашем случае он равен отношению противолежащего катета к прилежащему в полученном треугольнике). См. рис. 140, катеты вспомогательного треугольника.

Вертикальный катет равен $y + 1$. Горизонтальный равен x. Для точки $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ эти числа равны $9/5$ и $3/5$. Получается отношение катетов $k = 9/5 : 3/5 = 3$. Наша прямая имеет вид: $y = 3x - 1$.

Итак, на этом примере продемонстрировано, что если какая-то точка имеет рациональные координаты, то угол наклона прямой, проходящей через нее и через точку $(0, -1)$, будет рациональным числом. Это следует из того, что оба катета выражаются в этом случае рациональными числами, а отношение двух рациональных чисел является рациональным числом. Говорят, что рациональные числа «образуют поле», так как сумма, разность, произведение и частное дробей являются дробью.

Итак, если точка рациональная, то и наклон прямой, проходящей через нее и через точку $(0;-1)$ будет рациональным числом. Теперь мы докажем и обратное: если в формулу $y = kx - 1$ вместо k подставить любое рациональное число, то мы всегда получим в пересечении с окружностью две точки: $(0;-1)$ и какую-то другую рациональную точку.

Как найти точку пересечения прямой $y = kx - 1$ с окружностью $x^2 + y^2 = 1$?

Нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = kx - 1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Подставим значение y из первого уравнения во второе

$$x^2 + (kx-1)^2 = 1$$

и раскрываем скобки

$$x^2 + k^2x^2 - 2kx + 1 = 1.$$

Упрощаем:

$$x^2 + k^2x^2 = 2kx.$$

Можно сократить на x, так как случай $x = 0$ нам не интересен — он даст уже знакомую точку $(0,-1)$:

$$x + k^2x = 2k.$$

Выразим теперь x и y через k:

$$x(1+k^2) = 2k; \quad x = 2k/(1+k^2),$$

$$y = \frac{2k^2}{1+k^2} - 1 = \frac{k^2-1}{k^2+1}.$$

Из этих формул видно, что если k — рациональное число, то y и x — тоже рациональные. Рациональные числа — это числа, с которыми можно производить действия арифметической природы — плюс, минус, разделить, умножить. Рациональные числа от этого остаются рациональными (то есть эти действия не выводят нас за пределы множества рациональных чисел).

Что значит «k — рациональное число»? Это значит, что $k = \frac{m}{n}$. Подставим вместо k дробь $\frac{m}{n}$, считая, что m, n — положительны, причем $m > n$, а дробь $\frac{m}{n}$ несократима:

$$x = \frac{2\frac{m}{n}}{\frac{m^2}{n^2}+1} = \frac{2mn}{m^2+n^2}, \quad y = \frac{\frac{m^2}{n^2}-1}{\frac{m^2}{n^2}+1} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}.$$

Осталось вспомнить, что в исходном уравнении $x = a/c$ и $y = b/c$. Поэтому можно взять в качестве a числитель первой дроби, в качестве b — числитель второй дроби и в качестве c — их общий знаменатель. Получится: $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$. Одно из решений получается сразу, а прочие ему пропорциональны. Мы имеем тот же ответ, что и при первом способе решения. Внешне два метода, которыми мы решали эту задачу, совершенно не связаны друг с другом. Координаты и окружность нам показывают, какие множества высекают на плоскости те или иные алгебраические уравнения. А в первом способе была делимость и основная теорема арифметики. Она, являясь исключительно арифметическим приемом, не имеет никакого отношения к геометрии. Стоит сказать, что если бы математики приходили к разным результатам, решая одну и ту же задачу разными методами, то математика не была бы наукой. На деле же математика — это одно большое знание, связывающее разные методы между собой одним и тем же ответом.

Как видим, пифагоровы тройки нами разбиты «в пух и прах», но есть одна незадача. При $k = 0$ получается прямая, параллельная оси x (см. рис. 141).

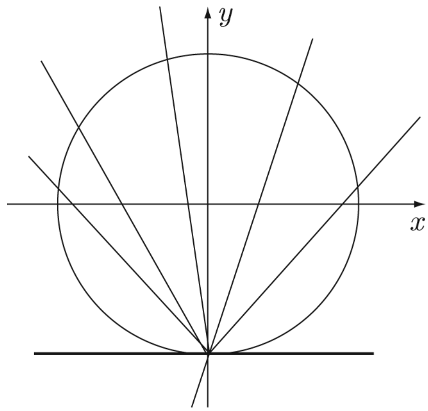

Рис. 141. Совпадение двух точек пересечения.

И вторая точка пересечения оказывается равной первой. Это как раз и отражает эффект касания. Алгебраические геометры, когда говорят о касании, всегда имеют в виду кратный корень, то есть корень, в котором совпали вместе несколько бывших некратных решений.

Есть еще один любопытный момент. Есть еще одна рациональная точка, которую мы не заметили на окружности. Точка $(0, 1)$. Это решение появится у нас при $k = \infty$.

Если мы хотим *параметризовать* окружность с помощью рациональных чисел, нужно, чтобы каждому рациональному числу соответствовала одна, и только одна точка на окружности. У нас же получается так, что на окружности есть лишняя точка, которая ни одному рациональному k не соответствует. В таком случае математики рассматривают не обычную прямую, а *проективную*. Мы уже сталкивались с проективной геометрией. В задаче на построение с помощью линейки у нас точка пересечения пучка прямых уходила в бесконечность.

Таким образом, методы алгебраической геометрии часто связаны с проективной геометрией.

А теперь **третий метод** решения той же задачи — комплексные числа. Мы разберем его на следующей лекции, а сейчас — обещанное введение в арифметику комплексных чисел.

Очень хочется разложить на множители x^2+y^2. Мы умеем раскладывать разность квадратов. Попробуем представить нашу сумму в виде разности:

$$x^2+y^2=x^2-(-y^2).$$

Если бы я мог извлечь корень из $-y^2$, то смог бы разложить это выражение следующим путем:

$$x^2+y^2=x^2-(-y^2)=x^2-(-1y^2)=(x-\sqrt{-1}y)(x+\sqrt{-1}y).$$

В обычной жизни корень из -1 не извлекается, но с помощью комплексных чисел это возможно. Пока мы исходим из желания получить комплексное число наиболее естественным образом. Мы хотим разложить сумму квадратов на множители. Давайте считать, что есть такое число $\sqrt{-1}$, обозначим его за i. $\sqrt{-1}=i$. Тогда

$$x^2+y^2=x^2-(-y^2)=x^2-i^2y^2=(x-yi)(x+yi).$$

Это критически важно для многих задач. Например, для задачи о том, какие простые числа раскладываются *в сумму двух квадратов.* Число 41 — простое. Оно является суммой двух квадратов: $25+16$; $41=5^2+4^2$. Если мы умеем раскладывать такую сумму на множители, то у нас получатся любопытные вещи: $41=(5+4i)(5-4i)$. Мы попадем в знакомую ситуацию, связанную с разложением числа 41 на множители, только теперь эти множители — числа новой природы.

Число i — не является вещественным (то есть не лежит на обычной числовой прямой и не может использоваться для измерения физических величин) и, если мы нарисуем вещественную ось, оно будет находиться где-то вне нашей оси. Мы можем выбрать сами, где его поместить. Удобнее всего поместить i на вертикальной оси, выбрав некоторую плоскость, содержащую обычную вещественную ось (см. рис. 142).

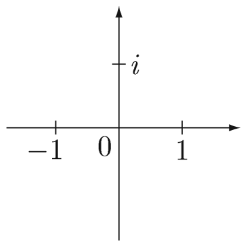

Рис. 142. Вот где притаилось загадочное число i.

Тогда получится, что любое число $x + yi$ «живет на плоскости» в точке с координатами (x, y). Если мы хотим ввести в рассмотрение некоторую новую сущность, которая в квадрате дает минус единицу, то нам нужно уметь это число умножать на любые действительные числа. И такие произведения $yi = z$ никогда не могут быть обычными числами, иначе само $i = z/y$ превращалось бы в обычное число. А мы уже убедились в том, что i имеет «невещественную» природу. Кроме того, мы должны уметь выполнять действия сложения и вычитания между обычными (вещественными или действительными) числами и числом i.

Давайте посмотрим. Беру вещественные числа и составляю выражения:

$$(x + yi); (z + ti).$$

Вопрос: в каком случае эти два выражения задают одно и то же число? Попробуем действовать по привычным правилам.

$$x + yi = z + ti,$$
$$x - z = ti - yi,$$
$$x - z = i(t - y).$$

Если $t = y$, то из последнего равенства имеем $x = z$.

Если $t \neq y$, то получаем выражение

$$i = \frac{x-z}{t-y}.$$

Этого *не может быть*, так как $\dfrac{x-z}{t-y}$ — вещественное число. А число i — НЕ вещественное. Противоречие. **Значит,** $x + yi$ **и** $z + ti$ **равны тогда и только тогда, когда** $x = z$ **и** $t = y$ **одновременно.**

Из этого следует, что каждой точке плоскости соответствует единственное комплексное число.

Продолжение в следующей лекции (то есть в лекции 4 части 2).

Лекция 4

А.С.: Сегодня мы будем заниматься комплексными числами. Но для начала интересная зарисовка из теории вероятностей. Если бы нас было человек 30, я бы поставил 5 мороженых к 1, что у двоих из здесь присутствующих совпадут дни рождения. На самом деле граница проходит на числе 23. Если в аудитории 23 человека, то вероятность совпадения хотя бы двух дней рождения примерно равна 50%. Правда, совпадут только месяц и число рождения, но не обязательно год. Для людей, которые об этом не задумывались, это совершенно удивительный факт. Вроде бы всего 23 человека, как же такое может быть? Но математика открывает этот секрет.

Еще один интересный сюжет: два человека решили встретиться в метро на станции Кропоткинская. Но вышло так, что они не договорились о времени. Известно лишь, что они свободны между 9 и 10 утра. Стратегия у них такая: человек приходит и ждет 15 минут. Если не дождался, уходит. Вопрос: что вероятней, встретиться или разминуться? Чему равна вероятность того, что они встретятся?

«Математическая» теория вероятностей на эту тему говорит следующее. Давайте расположим на плоскости все возможные исходы в этой «игре».

По оси x будем откладывать момент прихода первого, а по y — второго (в минутах после 9 часов). Получившийся квадрат называется *фазовым пространством задачи* (рис. 143). А вот если первый может появиться в любой момент от 9 до, например, 11 часов, то фазовое пространство будет не квадратом, а прямоугольником. Так как и момент появления первого, и момент появления второго совершенно непредсказуемы в рамках промежутка с 9 до 10, следует представлять себе, что и квадрат (слева), и прямоугольник (справа) покрыты равномерной сетью из большого количества точек.

Теория вероятностей постоянно оперирует с понятием «зависимости» и «независимости» нескольких случайных величин. Здравый смысл подсказывает, что наши события (то есть приход 1-го и приход 2-го) независимы. Тогда все исходы, т. е. пары (время

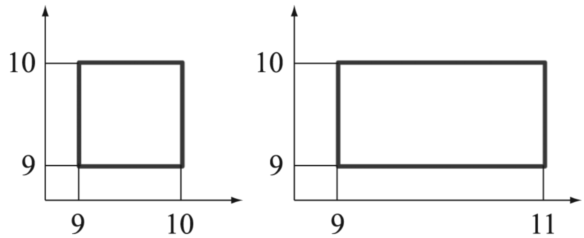

Рис. 143. Два разных фазовых пространства.

прихода первого и время прихода второго) — равновероятны. Мы сейчас нарисуем зону, в которой друзья встретились, и посмотрим, какая у нее площадь (для левой части рис. 143).

Если они пришли в один и тот же момент, то из таких точек мы получим диагональ – одинаковый момент прихода. Ясно, что они встретятся (и время ожидания будет равно 0).

А если они немножко отклонились от диагонали влево/вправо? Тогда тоже встретятся, потому что один из них пришел немножко раньше другого и дождался второго. Надо понять, на какое самое большое число минут им можно отклониться друг от друга по времени прихода, чтобы встреча еще произошла? На 15 минут. На одну четверть часа. Иначе будет как в известной песне*.

Мы получили границы зоны встречи. Что происходит на границе? Первый пришел, например, в 9 часов 50 минут, а второй в 9:35. Тогда второй, который пришел в 9:35, уже собирался уходить, и тут появился первый.

Теперь надо посчитать площадь «встречи» (то есть участка квадрата, описывающего пары моментов прихода, при которых встреча произойдет) и поделить ее на общую площадь фазового пространства. Вычислим сначала площадь оставшейся части для случая квадрата (рис. 144).

$$s = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

— площадь оставшейся части, $S = 1^2 = 1$ — площадь всего ква-

*Договорились мы на завтра: «На том же месте, в тот же час!»

драта,

$$S - s = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

— площадь «встречи».

Рис. 144. Встреча возможна только внутри шестиугольника ($15' = 0{,}25$ часа).

Число $\frac{7}{16}$ чуть-чуть меньше $\frac{1}{2}$. То есть ждут всего 15 минут, а вероятность встречи близка к 50%.

Упражнение. А какой будет ответ, если фазовое пространство не квадратное, а прямоугольное (рис. 143, справа)?

Про теорию вероятностей можно говорить очень долго. Это отдельная, очень большая, интересная наука и для школьной программы, и для людей, занимающихся другими науками. В теории вероятностей есть свои проблемы. Например, данные про большой город типа Москвы входят в очень резкий контраст с базовыми предположениями теории вероятностей. Рассмотрим состояние пробок на дорогах. Оно складывается из миллиона случайных решений отдельных людей. Каждый, у кого есть машина, решает, поехать ли на машине или на общественном транспорте, то есть примерно миллион человек одновременно решают задачу, на чем им ехать. И типовое предположение теории вероятностей о том, что выборы людей независимы друг от друга, предсказывает абсолютно одинаковые пробки при одинаковых метеорологических условиях. Если наша теория верна, если решения независимые, то должны быть идентичные дорожные ситуации при одинаковых условиях. Аварии учесть трудно. Но одна, две мелких аварии не сильно влияют на трафик. Математики очень мало знают про транспорт. Но самое главное — есть стойкое ощущение, что эта модель неверна. Люди друг с другом каким-то образом связаны. Они реагируют на фазы Луны, пятна на Солнце или на что-то еще и принимают одинаковые решения. (Например, если их просят назвать известного русского поэта, все как один говорят: Пушкин.) Это — единственное объяснение, почему при абсолютно идентичных условиях бывают диаметрально противоположные по структуре пробки. Сегодня город едет, а завтра — стоит.

Надо признать, что нам не всё известно. Я, на самом деле, считаю, что про социальные науки (социологию, политологию, экономику) нам вообще почти ничего неизвестно. Математики врут, когда говорят, что они разобрались в том, как функционирует социум. Модели примитивные, никогда ничего не предсказывают. Иногда объясняют то, что было вчера.

С географией дела обстоят лучше. Расселение меняется медленно. Редко бывает так: с утра не с той ноги встал и с досады оказался не в Москве, а в Иркутске*. Эталоном науки должна быть физика — наука о неживой природе. Она разработана до такой степени, которая никаким инопланетянам, наверное, не снилась. И если с физикой сравнивать науки о социуме, то математический блок социальных наук практически не развит. Поэтому всяким «гуру», которые появляются на «Полит.ру», в «Ведомостях» или прочих изданиях, вообще верить нельзя (в том числе и мне самому!). Они делают прогнозы, а через неделю уже всё по-другому. Я вижу, о каких моделях они говорят, и понимаю, что там обман в каждом слове. А в математике, в лингвистике, в других не социальных науках нет места подвоху.

* * *

Вернемся к комплексным числам. Я хотел рассказать о том, как чудесным образом с помощью комплексных чисел решаются некоторые уравнения. На прошлой лекции мы решили, что хотим иметь

---

*Хотя один подобный (похожий) эпизод описан в «поэме в прозе» В. Ерофеева «Москва — Петушки».

такое невещественное число i, что $i^2 = -1$. И каждой точке плоскости сопоставили некоторое комплексное число: $(x, y) \to x + yi$. Оказывается, эти числа подчиняются привычным математическим действиям: плюс, минус, умножить, разделить. Математики довольно большую часть времени живут в системах, которые называются *полями*. Поле — это такое обобщение обычных чисел. Это такие системы «чисел», в которых можно совершать операции **плюс**, **минус**, **умножить** и **разделить** по нормальным обычным правилам. То есть вы пишете какое-то алгебраическое выражение, раскрываете скобки, делите, сокращаете. Всё, что можно сделать с обычными действительными числами, можно сделать и с элементами любого поля. А поля бывают очень разные и иногда совершенно неожиданно выглядят*.

Мы хотим, чтобы множество комплексных чисел стало полем, то есть чтобы в нём можно было делать всё, что мы привыкли делать с действительными числами, в частности, умножать и делить. И об этом мы сейчас поговорим.

Было доказано, что $x + yi = z + ti$ *только в том случае*, если имеют место равенства $x = z$ и $y = t$.

То есть если это просто одна и та же точка на плоскости. А разные точки дают разные комплексные числа, поэтому комплексные числа занимают как минимум всю плоскость. А из стремления к минимализму мы постараемся ограничиться **только** точками плоскости. Давайте учиться складывать, вычитать, умножать и делить точки плоскости.

Чему будет равна сумма $(x + yi) + (z + ti)$?

Мы должны получить какое-то комплексное число. Значит, у нас будет часть с i и часть без i. Если отложить часть «без i» по оси абсцисс, а часть «с i» — по оси ординат, то у нас получится какая-то точка на плоскости. Часто комплексное число отождествляют с вектором (т. е. стрелочкой), ведущим из начала координат в эту точку. Из правила сложения векторов получается, что $(x + yi) + (z + ti) = (x + z) + i(y + t)$.

---

*Как и обычные поля — сжатые, заросшие, заметенные снегом…

Давайте посмотрим, почему так получается (рис. 145).

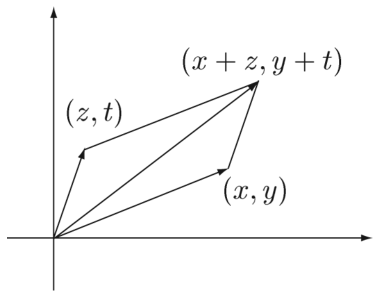

Рис. 145. Сложение комплексных чисел.

Точки (x, y) и (z, t) задают нам два вектора на плоскости, выходящие из начала координат. Если сложить два вектора, получится вектор с координатами $(x+z, y+t)$.

В школе это называют правилом параллелограмма.

Сумма двух точек плоскости строится так. Берем векторы, порождаемые нашими точками, и складываем их по правилу параллелограмма.

Вычитание от сложения практически не отличается:

$$(x+yi)-(z+ti)=(x+yi)+(-z-ti)=(x-z)+i(y-t).$$

Вектор, порождаемый точкой (z, t), развернется в другую сторону — туда, где достроен смежный параллелограмм (рис. 146).

Итак, операции **плюс** и **минус** определены и всегда осуществимы. Также видно, что у каждого числа есть противоположное к нему: $(x+yi)$ и $(-x-yi)$. С точки зрения сложения и вычитания система уже построена и ведет себя очевидным образом. Теперь переходим к гораздо более интересной теме. А именно: **умножение и деление комплексных чисел.**

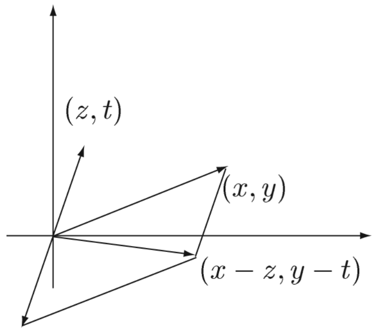

Рис. 146. Вычитание комплексных чисел.

Я хочу узнать, как должно выглядеть умножение

$$(x+yi)(z+ti).$$

Будем пользоваться распределительным законом, который математики называют *дистрибутивным.* Проще говоря, разрешается раскрывать скобки: $a(b+c) = ab + ac$ (как учили в школе).

А также $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$.

Правило дистрибутивности вынуждает нас так умножать. Потому что так делается в вещественных числах. Давайте попробуем перемножить два комплексных числа

$$(x+yi)(z+ti) = xz + xti + zyi + yti^2.$$

Теперь давайте вспомним, что $i^2 = -1$,

$$(x+yi)(z+ti) = xz + xti + zyi + yti^2 = \\ = xz + xti + zyi - yt = (xz - yt) + (xt + yz)i.$$

Мы научились умножать. Произведением точек с координатами (x, y), (z, t) служит точка на плоскости с координатами $(xz - yt, xt + yz)$.

Но этого для нас мало, потому что мы не видим, где «живет» на плоскости точка с такими координатами. Мы должны увидеть ее, понять, как ее построить. Как получить ее из векторов, порождаемых точками (x, y), (z, t). Какие у этих векторов характеристики? У них есть длины и углы поворота (*отклонения*) от оси x. Пользуясь этими данными, мы должны получить новый вектор $(xz - yt, xt + yz)$.

Нам нужно провести некоторое исследование. Для этого разработаем терминологию.

У комплексного числа — точки на плоскости — первая координата называется *вещественной частью*, а вторая — *мнимой*. Мнимой ее называют потому, что, когда начинали с комплексными числами общаться, считали, что числа i не существует. Существуют только вещественные числа. Остальные не существуют, они как бы у нас в воображении, imaginary numbers. С тех пор у комплексных чисел есть действительная и мнимая части.

Рассмотрим еще такую конструкцию. Для каждого вектора рисуется вектор, симметричный относительно вещественной оси. Точка $(x; y)$ перейдет в точку $(x, -y)$ (см. рис. 147).

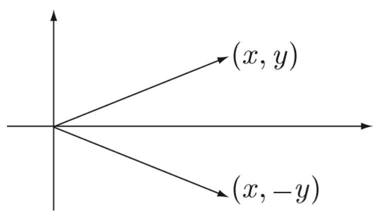

Рис. 147. Векторы, симметричные относительно оси абсцисс.

Числу $x + yi$ естественным образом сопоставляется число $x - yi$, которое лежит по другую сторону от вещественной оси.

Числа вида $(x + yi)$ и $(x - yi)$ называются *сопряженными*. Чему равно произведение этих чисел?

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2.$$

Что такое $x^2 + y^2$ в геометрическом смысле? Это — длина вектора, обозначающего наше комплексное число, возведенная в квадрат. Квадрат длины комплексного числа, рассматриваемого как вектор, равен произведению его самого и ему сопряженного.

И еще одна выкладка. Интересно, что получится, если я перемножу векторы, сопряженные к нашим исходным векторам:

$$(x - yi)(z - ti) = (xz - yt) - (xt + yz)i.$$

Вещественная часть не изменилась, а мнимая поменяла знак. Было $(xz - yt, xt + yz)$, стало $(xz - yt, -xt - yz)$. Получается, что **если мы берем произведение двух сопряженных, то получается сопряженное к их произведению** (рис. 148).

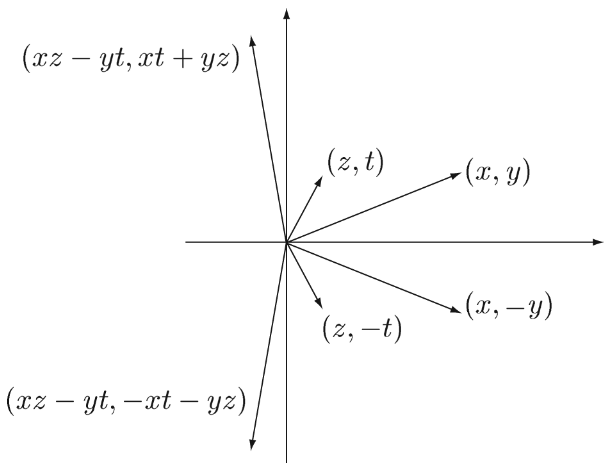

Рис. 148. Математики сказали бы так: умножение комплексных чисел «уважает» операцию сопряжения, и наоборот. Можно вначале сделать сопряжение каждого сомножителя, а потом перемножить их, а можно вначале перемножить, а после сделать сопряжение перемноженных. Результат будет одинаковым.

Хотелось бы уметь делить одну точку на плоскости на другую точку. Это тоже совсем не сложно, если, конечно, не делить на ноль. Но на ноль мы и раньше не могли делить. Так что ничего удивительного в том, что мы не будем делить на 0, нет. Значит, так. Попробуем разделить на число, которое не равно нулю.

Используем основное свойство дроби: *дробь не изменится, если и числитель, и знаменатель умножить на одно и то же число.* В качестве такого числа мы возьмем число, сопряженное к $z + ti$:

$$\frac{x+yi}{z+ti} = \frac{(x+yi)(z-ti)}{(z+ti)(z-ti)} = \\ = \frac{(xz+yt)+(yz-xt)i}{z^2+t^2} = \frac{xz+yt}{z^2+t^2} + \frac{yz-xt}{z^2+t^2}i.$$

Итак, мы получили комплексное число в стандартном виде: вещественная $\frac{xz+yt}{z^2+t^2}$ и мнимая $\frac{yz-xt}{z^2+t^2}$ части.

Всё. Теперь мы умеем делить, умножать, складывать и вычитать — всё как с обычными действительными числами. Однако мы пока не видим, как геометрически это выглядит, а это очень важно и чрезвычайно полезно.

Давайте все-таки это поймем. Для этого перемножим

$$(x+yi)(z+ti)(x-yi)(z-ti).$$

Если я буду перемножать почленно, то получится

$$(x+yi)(z+ti)(x-yi)(z-ti) = [(xz-yt)+(xt+yz)i][(xz-yt)-(xt+yz)i].$$

Обратите внимание, получились сопряженные комплексные числа — значит, их произведение равно

$$(x+yi)(z+ti)(x-yi)(z-ti) = \\ = [(xz-yt)+(xt+yz)i][(xz-yt)-(xt+yz)i]) = (xz-yt)^2+(xt+yz)^2.$$

А если я вспомню, что от перемены мест множителей произведение не меняется, и переставлю скобки, то получу

$$[(x+yi)(x-yi)][(z-ti))(z+ti)] = (x^2+y^2)(z^2+t^2).$$

Но мы же умножали одно и то же, значит, результаты совпадают:

$$(x^2+y^2)(z^2+t^2) = (xz-yt)^2+(xt+yz)^2.$$

Это таинственное правило иногда изучается в школе как одно из правил сокращенного умножения. Но смысл его скрывается. Можно честно раскрыть все скобки и получить верное равенство. Совершенно честно, без всяких комплексных чисел. Но если вы сделаете это без комплексных чисел, то природа явления будет не видна и непонятна. А с помощью комплексных чисел мы говорим, что $(xz - yt)^2 + (xt + yz)^2$ — квадрат длины вектора, который является произведением исходных векторов (x, y) и (z, t). А $(x^2 + y^2)$ и $(z^2 + t^2)$ — квадраты длин самих исходных векторов. Если я извлеку корень из этих длин, то получится, что

длина вектора произведения равна произведению длин исходных векторов

$$\sqrt{(xz - yt)^2 + (xt + yz)^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + t^2)}.$$

Мы узнали, что **при перемножении комплексных чисел их длины перемножаются.** Осталось выяснить, куда будет направлен вектор произведения. Вопрос, что же происходит с углами поворота каждого из сомножителей?

Сейчас я могу только сказать, что мое произведение лежит где-то на окружности радиуса, равного произведению длин наших векторов. Но где именно? Сейчас мы рассмотрим преобразование плоскости. Давайте нанесем на наши оси координат единичную окружность. На этой окружности «живут» точки 1, -1, i и $-i$ (рис. 149).

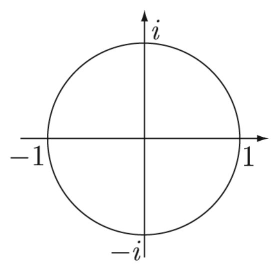

Рис. 149. Единичная окружность на комплексной плоскости.

Как записать координаты точки на окружности? Какое комплексное число живет в точке единичной окружности, если вектор повернут на угол φ (см. рис. 150)?

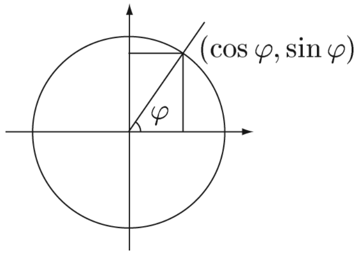

Рис. 150. Нижний катет равен $\cos\varphi$, правый равен $\sin\varphi$.

Точка данной окружности определяется углом, на который повернулся вектор единичной длины. Косинус — это координата по оси x, синус — по оси y. В учебниках пишут, что косинус — это отношение прилежащего катета к гипотенузе. Но здесь гипотенуза имеет длину 1. Поэтому косинус равен просто горизонтальному катету. А синус — это отношение другого катета к гипотенузе. Гипотенуза имеет длину 1, и синус — это просто второй катет.

А теперь я совершу обещанное преобразование: умножу все точки плоскости на комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$.

Напомню, что при умножении комплексных чисел длина получаемого вектора равна произведению длин перемножаемых

$$\sqrt{(xz - yt)^2 + (xt + yz)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{z^2 + t^2}.$$

Подставим слева в формулу $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ вместо z и t

$$\sqrt{(x^2 + y^2)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \sqrt{(xz - yt)^2 + (xt + yz)^2}.$$

Но $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ (основное тригонометрическое тождество, следствие теоремы Пифагора). Получаем

$$\sqrt{(x^2 + y^2)(1)} = \sqrt{(xz - yt)^2 + (xt + yz)^2}.$$

Мы домножаем на единицу, а значит, длина вектора не изменяется.

Получается, что при умножении на число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ любое комплексное число остается на той же окружности, на которой оно лежало.

Комплексное число «жило», например, в точке A, на расстоянии $\sqrt{x^2+y^2}$ от точки $(0,0)$; после преобразования оно будет «жить» на той же самой окружности в какой-то другой точке B, но на том же расстоянии от $(0,0)$ (см. рис. 151).

Похожим образом показывается, что **для любых двух точек плоскости умножение на $\cos\varphi+i\sin\varphi$ не изменит расстояния между ними.**

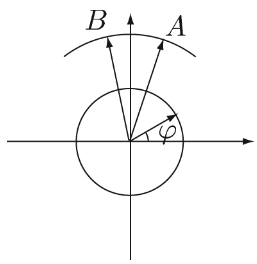

Рис. 151. $B = A\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Иными словами, умножение на число $\cos\varphi+i\sin\varphi$, примененное ко всем точкам плоскости, является *движением плоскости.*

Давайте попробуем понять, что же это за движение.

Для простоты изложения по ходу дела точки плоскости я буду называть комплексными числами, а комплексные числа — точками плоскости. Это позволит стереть некоторый налет «мнимости», остающийся в выражении *комплексные числа.*

Пусть $q_1 = x + yi$, $q_2 = z + ti$ — два комплексных числа, второе из которых не равно ни нулю, ни единице, но при этом лежит на единичной окружности (то есть имеет модуль, или длину, равную единице). Второе число, q_2, мы на время всего рассуждения зафиксируем, а первое число, q_1, будем «перебирать», подставляя всевозможные комплексные значения.

С помощью формулы $q_1 q_2$ мы сконструировали некоторое преобразование точек плоскости: любая точка q_1 при этом преобразовании переходит в точку $q_1 q_2$. Ключевое утверждение состоит в том, что у этого преобразования будет только одна неподвижная точка: $q_1 = 0$ (то есть только одна точка останется на месте).

Проведем доказательство этого утверждения. Допустим, какая-то точка q_1 осталась на месте. Это означает, что $q_1 = q_1 q_2$. Перенесем оба выражения в левую часть, получим:

$$q_1(1 - q_2) = 0.$$

Мы договорились, что $q_2 \neq 1$, а тогда $1 - q_2 \neq 0$, и на этот множитель можно сократить обе части равенства. Следовательно, $q_1 = 0$, что и утверждалось. Таким образом, наше преобразование плоскости является движением (что было установлено выше) и оставляет на месте ровно одну точку, а именно точку $q_1 = 0$.

Один из примеров движения плоскости ровно с одной неподвижной точкой хорошо известен: это — поворот на некоторый угол относительно неподвижной точки. Но, может быть, одними поворотами дело не ограничивается? Этот вопрос исследовал французский математик М. Шаль. Оказалось, что ничего, кроме поворотов, в этой ситуации быть не может. Принимая его исследования на веру,* делаем вывод, что изучаемое преобразование является поворотом.

Итак, это движение — поворот. Остается вопрос, на какой угол мы повернули? Для ответа на этот вопрос вспомним, что число q_2 лежит на окружности, то есть равно $\cos\varphi + i\sin\varphi$ при некотором значении угла φ.

Я утверждаю, что наше движение является поворотом именно на угол φ. Потому что точка $q_1 = 1$ перешла в точку $q_1 q_2 = \cos\varphi + i\sin\varphi$. А раз единица в нее перешла, значит, мы повернули плоскость на угол φ. Ведь комплексное число $q_1 = 1 + 0i$ имело в начальный момент нулевой угол поворота.

*Доказательство данного утверждения не так уж и сложно, но уведет нас в сторону.

Таким образом, любая точка переходит в точку, которая получается поворотом на угол φ соответствовавшего исходной точке вектора.

В частности, если я беру некоторый вектор и умножаю его на вектор $\cos\varphi + i\sin\varphi$, то он переходит в вектор, повернутый на угол φ. Особый важный случай — это умножение на вектор $\cos\pi/2 + i\sin\pi/2$, то есть просто на число i. Умножение вектора на i приводит к тому, что этот **вектор поворачивается на 90°.** Это особенно важно для тех технических вузов, где изучают ТОЭ (теоретические основы электротехники). Злые языки даже утверждают, что перед основным экзаменом по ТОЭ там производится предэкзамен: у студента, заснувшего на лекции, над ухом стреляют хлопушкой и грозно спрашивают: УМНОЖЕНИЕ на i? Он должен сразу ответить: ПОВОРОТ НА 90 ГРАДУСОВ! (рис. 152).

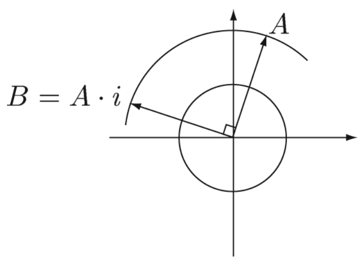

Рис. 152. Умножение на i — это поворот на 90°.

И окончательно. **При умножении комплексных чисел углы складываются.** Это правило, которое мы вывели, позволяет нам увидеть все арифметические операции над комплексными числами. А именно, при сложении комплексных чисел складываем их как вектора — по правилу параллелограмма. При умножении — длины векторов перемножаются, а углы поворотов складываются. Слегка почесав в затылке, можно даже сказать так: **при делении комплексных чисел их длины делятся, а углы поворота вычитаются друг из друга**.

Сейчас будет бонус. Наконец-то мы запомним две зловредные формулы.

Давайте возьмем еще одну точку, лежащую на единичной окружности: $\cos\psi + i\sin\psi$. Куда она перейдет при умножении на $\cos\varphi + i\sin\varphi$?

Она перейдет в точку той же окружности, но повернется на угол φ. То есть суммарный угол для произведения будет $(\psi + \varphi)$.

Получается, что произведение

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi)$$

равно $\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)$.

Теперь раскроем скобки:

$$\begin{aligned}&(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \\ &\qquad = \cos\varphi\cos\psi + \cos\varphi i\sin\psi + i\sin\varphi\cos\psi + i\sin\varphi i\sin\psi = \\ &\qquad\qquad = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi).\end{aligned}$$

С другой стороны, это произведение равно $\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)$. Получается, что

$$\begin{aligned}&\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi) = \\ &\qquad = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi).\end{aligned}$$

Но если два комплексных числа равны друг другу, то вещественная часть равна вещественной, а мнимая — мнимой:

$$\begin{aligned}\cos(\varphi + \psi) &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi,\\ \sin(\varphi + \psi) &= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi.\end{aligned}$$

Это и есть те «зловредные» формулы, которые доставляли вам головную боль в школе, всем поголовно. Они очень легко выводятся с использованием комплексных чисел.

Некоторые соображения о преподавании математики в школе.

У каждого человека есть некие безумные идеи, в которые он свято верит. Я свято верю в то, что школьная математика должна быть устроена следующим образом.

Преподавание математики начинается с **движений**, причем сразу же вводится понятие группы движений — сперва прямой и окружности, затем плоскости. Давайте без обиняков это называть своими именами — *группа движений изучаемого объекта.* Потом следует полная характеризация этих групп движений через то, сколько у тех или иных движений имеется неподвижных точек.

Есть такая теорема «о трех гвоздях». Если три точки плоскости остаются неподвижными при движении, то движение является тождественным преобразованием, то есть оно вообще ничего не меняет. Для прямой и для окружности имеются очевидные аналоги этой теоремы, которые еще проще.

Завершим вкратце классификацию движений плоскости. Если у движения имеются две различные неподвижные точки, то неподвижной окажется и вся прямая, их соединяющая, а само преобразование будет являться **отражением относительно этой прямой**. Если у движения ровно одна неподвижная точка, то это движение является **поворотом**. Если неподвижных точек нет, мы получаем два вида движения: **параллельный перенос** и **скользящая симметрия**. Больше никаких движений плоскости нет.

Это — теорема Шаля, которая должна входить во все школьные программы. После того, как это прошли, нужно приступать к **комплексным числам**. Надо сразу сказать, что плоскость — это комплексные числа, образующие **поле**. Все основные алгебраические понятия должны быть введены прямо в детском саду, чтобы потом в школе уже было можно браться за дело*.

После изучения комплексных чисел выводятся правила умножения и сразу — переход к тригонометрии. *Тригонометрия — это просто операции с комплексными числами, лежащими на окружности.*

*Здесь Остапа понесло. Но в целом, если мы заменим детский сад на младшую школу, то все алгебраические понятия и в самом деле можно ввести на примере систем остатков от деления на некоторое фиксированное целое число!

А дальше можно переходить к более интересным вещам, например, к диофантовым уравнениям.

Обсудим, при чем тут комплексные числа (которых Диофант не знал) и диофантовы уравнения? На вещественной оси есть числа специальной природы, называемые *целыми.* Они «живут» на одинаковом расстоянии в обе стороны от 0 до бесконечности. Это числа $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ и так далее. Между ними «живут» всякие другие числа, которые нас пока сейчас интересовать не будут (рис. 153). Диофантовы уравнения — это уравнения, которые надо решать в рациональных либо в целых числах. Мы ограничимся целыми решениями. На прошлой лекции мы рассматривали следующее уравнение

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Мы его решили двумя способами: с помощью анализа делимости в обычных целых числах и с помощью алгебраической геометрии. Есть еще и **третий способ**.

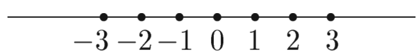

Рис. 153. Решетка целых чисел на числовой оси (такого рода решетки бывают и на плоскости).

Подобно тому, как среди вещественных чисел можно выделить замечательное семейство целых, можно выделить не менее замечательные семейства и среди комплексных чисел. Чем целые числа принципиально отличаются от вещественных? В них (во множестве целых чисел) нельзя делить. Иногда получается разделить, а иногда — нет. Анализ того, что на что делится, приводит к содержательной и красивой науке: к простым числам, к основной теореме арифметики и, в конечном счете, к решению этого самого уравнения $x^2 + y^2 = z^2$.

Теперь мы живем на плоскости, и хотелось бы сделать что-нибудь подобное во множестве комплексных чисел. Давайте по аналогии распространим целые числа на плоскость. Как будут выглядеть целые числа на плоскости? Скажу по секрету, что на плоскости имеется огромное количество числовых систем, которые обобщают и продолжают целые числа. Можно построить числовые системы разными способами, и они все чрезвычайно важны для многих диофантовых уравнений. Различные диофантовы уравнения требуют различных числовых систем. Но самое простое — это рассмотреть комплексные числа, у которых просто обе части (и вещественная и мнимая) являются целыми числами (рис. 154).

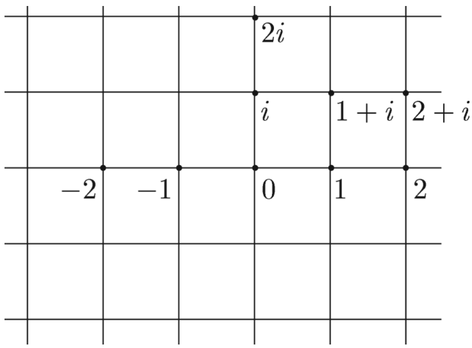

Рис. 154. Загадочные гауссовы числа: среди них есть «простые», но как раз они-то и оказались самыми загадочными.

Узлы этой сетки и есть «целые числа» на плоскости. Первым их рассматривал Гаусс, мы назовем их $Z[i]$. Z — **значит «целое», $[i]$ — конкретное комплексное число, присовокупленное к целым.**

Он к целым числам прибавил число i и спросил себя: а какие тогда должны быть числа еще взяты? Если мы взяли i и взяли 1, то мы должны, конечно, взять их сумму — $1 + i$. Потому что мы должны уметь складывать, вычитать и умножать (если хотим действовать по правилам обычных целых чисел). Ясно, что эти требования нас в конце концов приведут ко взятию произвольных целых кратных числа i, сложенных с любыми целыми (обычными) числами.

Числа вида $a+bi$, где a, b — целые числа, называют гауссовыми числами. Складывать и вычитать их можно «покомпонентно», то есть $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$. При этом «на выходе» получаются снова Гауссовы числа, потому что сумма и разность целых чисел всегда являются целыми числами.

Но для полноценной работы с новыми числами нужно уметь их друг на друга умножать. Чудо состоит в том, что при перемножении Гауссовых чисел по обычным правилам перемножения комплексных чисел «на выходе» снова получаются Гауссовы, то есть целые комплексные числа. Читателю книги доставит удовольствие самостоятельно перемножить два Гауссовых числа, чтобы увидеть, что целочисленность вещественной и мниной частей результата умножения сохраняется.

Кроме того, новые числа удовлетворяют всем тем же принципам умножения, вычитания и сложения, которые верны для обычных целых чисел (потому что новые числа — это «подмножество» комплексных чисел, а последние этим правилам подчиняются).

В то же время из-за того, что мы акцентируем внимание на их «цельности», то есть целочисленности, у нас появляются нетривиальные моменты, связанные с их делимостью друг на друга (аналогично тому, как в системе обычных целых чисел разрабатывается теория делимости, теория простых чисел и разложение на простые множители).

В частности, можно определить понятие *простого гауссова числа.*

Так вот, оказывается, что всё, что мы знаем про целые числа — делимость, простота, основная теорема арифметики — удивительным образом переносится на $Z[i]$, то есть на систему Гауссовых чисел. Любое Гауссово $a+bi$ с целыми a и b **единственным образом** раскладывается в произведение простых чисел, которые уже ни на что не делятся.

Небольшое замечание: на числа $1, i, -1$ и $-i$ делятся все Гауссовы числа, так же, как в целых числах на прямой все числа делятся на 1 и -1. Например, $(a+bi):i=b-ai$. Это чуть-чуть усложняет ситуацию, потому что однозначность разложения на простые множители выполняется лишь с точностью до умножения и деления на $1, i, -1$ и $-i$. Потому что с точки зрения теории делимости $(a+bi)$ и $(b-ai)$ — это один и тот же простой множитель.

Для целых чисел на комплексной плоскости вообще появляется много фокусов, которых не было для целых чисел на прямой. Например, число 2 перестало быть простым. Ибо оно раскладывается на множители $2=(1+i)(1-i)$. Кстати, из геометрии это тоже следует (рис. 155).

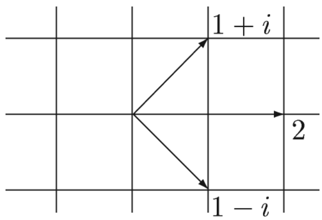

Рис. 155. Вот чудеса-то: сумма чисел $(1+i)$ и $(1-i)$ равна их произведению! Но обычное число 2 похитрее будет: $2+2=2\cdot 2=2^2$.

По правилу умножения мы должны взять произведение двух длин. Длина вектора $1+i$ равна длине вектора $1-i$, и обе равны $\sqrt{2}$, так как это гипотенуза прямоугольного треугольника с единичными катетами. Значит, у произведения должна быть длина $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$.

Посмотрим, что произойдет с углами. При умножении углы складываются. Но они у нас противоположные по знаку, значит, при сложении получится 0. То есть при умножении мы получим вектор длины 2, направленный по оси X. Обратите внимание, что мы невзначай нашли одно из решений уравнения в комплексных числах: $z+w=zw$ (подпись к рис. 155).

Какие еще числа перестают быть простыми? Например, число 5. Теперь $5=(2+i)(2-i)=2^2+1^2$. А число 3 можно разложить на множители или нет? Есть ли тут какое-то общее правило?

Оказывается, есть. Более того, ответ на заданный вопрос теснейшим образом связан с вопросом про «обычные» целые числа, а именно: какие простые числа можно представить в виде суммы двух полных квадратов — то есть двух чисел, из которых можно нацело извлечь квадратный корень? Потрясающим образом этот вопрос решается введением Гауссовых чисел и изучением их арифметики.

Окинем еще раз взглядом наши построения. Мы ввели комплексные числа. Потом в них выделили семейство «целочисленных» комплексных чисел и назвали их гауссовыми. Там развили делимость, научились делить с остатком, обнаружили «Основную теорему арифметики». Зачем? Ответ таков: некоторые вопросы из арифметики обычных целых чисел можно решить только через гауссовы числа.

Какие простые числа представляются в виде суммы двух квадратов? Эта задача чрезвычайно важная в теории *кодирования*. (Здесь под словом «кодирование» понимается запись информации в таком виде, чтобы ее не смогли прочесть посторонние лица. А «посторонние лица» обычно очень интересуются методами «взлома» использованного кода.) Человек, который что-то знает про кодирование/декодирование, может взять и разрушить систему Пентагона в два щелчка мыши (вот вам и готов международный конфликт).

Вопросы математического кодирования — это вопросы примерно такого же типа, как и задача о разложении простого числа в сумму двух квадратов. И вот долгожданный ответ на поставленный выше вопрос.

Теорема. (Ферма — Эйлер — Гаусс. Гаусс здесь упомянут потому, что он ввел Гауссовы числа и установил простым образом все три эквивалентности, приводимые в формулировке.)

«Обычное» простое число (не комплексное) p является суммой двух квадратов, то есть $p = x^2 + y^2$ (x и y — обычные целые числа), тогда и только тогда, когда p перестает быть простым в гауссовой системе чисел $Z[i]$. И происходит это ***тогда и только тогда****, когда либо $p = 2$, либо число «p» имеет остаток 1 при делении на 4, то есть $p = 4k + 1$.*

У Гаусса несколько «царских результатов». Он называл их разными именами. Например, есть некий закон про поведение остатков при делении одних чисел на другие. Гаусс назвал его «золотым результатом», «золотой результат Гаусса». Связь между представимостью простого числа p в виде суммы двух квадратов и его «поведением» в системе Гауссовых целых чисел — это королевская теорема Гаусса. Как следствие, «сокращая одну из эквивалентностей» в теореме выше, получаем как раз теорему Ферма — Эйлера: **Простое число в обычных натуральных числах является суммой двух квадратов тогда и только тогда, когда оно имеет остаток 1 при делении на 4.** Это мгновенно вычисляемая характеристика. Например, 97. При делении на 4 дает остаток 1: $97 = 96 + 1 = 4 \cdot 24 + 1$. Значит, по нашей теореме оно должно представляться в виде суммы двух квадратов. Так и есть: $97 = 81 + 16 = 9^2 + 4^2$.

Возьмите число, в котором 25 цифр. Проверьте, что оно имеет остаток 1 при делении на 4, это очень просто. Проверить, что оно простое, немножко сложнее, но тоже не очень долго. Так вот, если вы узнали, что оно простое, и вычислили, что оно имеет остаток 1 при делении на 4, то вы можете спорить на любую сумму с любым неверующим Фомой, что есть два числа, суммой квадратов которых исходное число является. Никакого полного доказательства этой теоремы, кроме как через гауссовы числа, мне не известно (существует, говорят, по крайней мере 6 доказательств).

Давайте вернемся к пифагоровым тройкам. Пифагоровы тройки очень красиво находятся с помощью гауссовых чисел. Предположим, есть тройка x, y, z обычных целых чисел, которые являются сторонами прямоугольного треугольника, то есть

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Опять рассмотрим прямоугольный треугольник, наименьший в семействе. Иными словами, x, y, z попарно взаимно просты, у них нет общих делителей. Тогда довольно просто показать, что $(x+yi)$ и $(x-yi)$ — также взаимно просты (это следует из разной четности x и y).

То есть у гауссова числа и сопряженного ему гауссова числа нет общих делителей.

Вспоминаем прошлую лекцию: $(x + yi)(x - yi) = z^2$.

Произведение равно квадрату некоторого числа. Значит, все (Гауссовы) простые множители числа z входят в него в четной степени. Это означает, что в левой части уравнения стоит, с точностью до обратимых множителей, произведение двух квадратов.

Этот прием применяется во всех похожих структурах, не только в гауссовых числах. Если мы можем доказать основную теорему арифметики, то будет верен и этот замечательный результат: если произведение двух взаимно простых чисел равно квадрату, то каждое из этих чисел является квадратом с точностью до умножения на обратимые числа $1, i, -1$ и $-i$ (для гауссовых чисел) или до умножения на любые другие обратимые числа (если целые числа — не гауссовы).

Заметая «под ковер» исследование дополнительных обратимых множителей, делаем вывод, что

$$(x + yi) = (m + ni)^2 = m^2 + 2mni - n^2 = (m^2 - n^2) + 2mni.$$

Комплексные числа равны в том и только том случае, когда их вещественные и мнимые части равны:

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn.$$

Отсюда уже нетрудно вывести и формулу для гипотенузы Пифагорова треугольника: $z = m^2 + n^2$.

Вот мы и получили «формулу индусов». Через гауссовы числа она выводится почти в одну строчку.

Теперь — пара слов про великую теорему Ферма. Такие методы, как тот, который мы сейчас рассматривали, развивавшиеся весь XIX век, не привели к решению великой теоремы Ферма для всех показателей. Привело совершенно другое соображение. Соображение такое: если бы существовала тройка a, b, c такая, что $a^n + b^n = c^n$, то существовала бы некоторая, как математики выражаются, *эллиптическая кривая* с набором свойств, которые противоречат ее природе. Это — доказательство великой теоремы Ферма в одной фразе. Правда, к этой «одной фразе» придется добавить фраз 20–30, чтобы хоть слегка пояснить, что это за зверь такой — **эллиптическая кривая**, и, главное, какое отношение она имеет к великой теореме Ферма.

Ну и последний сюжет.

Диофант решал самые разные уравнения. Некоторые он сформулировал, но был не способен решить. А точнее, решения некоторых из них не найдены в первых 6 томах. Мы ничего не знаем про оставшиеся 7 томов, и я не удивлюсь, если в них было всё, что потом открывали в XVII, XVIII, XIX веках. В частности, Эйлер стал рассматривать одно из тех уравнений, которые Диофант не решил. *Может ли быть так, что квадрат некоторого натурального числа отличается от куба другого натурального числа на единицу?* То есть требуется решить в целых числах уравнение

$$a^2 = b^3 \pm 1.$$

То, что квадрат одного числа просто равен кубу другого, очень легко представить себе, если $a = c^3$ и $b = c^2$, при некотором целом c. В самом деле, тогда

$$a^2 = (c^3)^2 = c^6 = (c^2)^3 = b^3.$$

Возьмем, например, $c = 3$. Тогда $a = 27, b = 9$: $27^2 = 9^3 = 729$. Так что эта задача неинтересная. Правда, число 729 напоминает мне один разговор.

Однажды два математика беседовали в кафе. Один другому говорит: «На свете нет ни одного числа, которое не было бы чем-то удивительным, просто ни одного». А второй отвечает: «Ну, как же? Ну, я возьму навскидку 1729. Что интересного в числе 1729?» А второй посмотрел на него и сказал: «Ты сам не догадываешься, насколько удивительное число ты назвал! Это первое из натуральных чисел, которое *двумя разными способами* представляется в виде суммы двух кубов».

Пальцем в небо ткнул и попал в число 1729. И вот что оказалось. Действительно, $1729 = 9^3 + 10^3$, и $1729 = 12^3 + 1^3$. Второй математик был сражен этим аргументом.

Так вот, бывает ли, чтобы куб и квадрат отличались на единичку?

Допустим, ваш ребенок играет в кубики. Он сложил из них большой куб, а вы украли у него один кубик. Тогда ребенок взял, развалил куб и сложил большой огромный квадрат. Может ли такое быть? Эйлер полностью решил эту задачу ($a^2 = b^3 \pm 1$).

Решим только одно уравнение из двух, потому что другое очень сложное: $a^2 = b^3 + 1$ — сложное, $a^2 = b^3 - 1$ простое.

В обоих случаях можно выписать ответ в явном виде.

У второго уравнения решений нет, кроме тривиальных: $a = 0$ и $b = 1$. Мы это сейчас докажем. А у первого, кроме тривиальных ($a = 1$ и $b = 0$), решением является пара $(2, 3)$. Ведь $3^2 = 2^3 + 1$. Других решений **нет**. Эйлер и это доказал, но весьма сложным путем.

Разберем простой вариант:

$$a^2 = b^3 - 1, \quad a^2 + 1 = b^3, \quad (a + i)(a - i) = b^3.$$

Могут ли у $(a + i)$ и $(a - i)$ быть общие множители? Пусть $(a + i)$ и $(a - i)$ делятся на какое-то простое гауссово число. Тогда их разность

$$(a + i) - (a - i) = a + i - a + i = 2i$$

тоже на него делится.

Простых гауссовых чисел, которые делят число $2i$, всего одно: $(1 + i)$. Есть еще $1 - i$, но это «то же самое простое число», ибо $1 - i = (-i)(1 + i)$ — то есть, одно получается из другого умножением на обратимое.

Значит, наши числа $(a+i)$ и $(a-i)$, если они не взаимно просты, могут делиться только на $(1+i)$. Но тогда их произведение делится на $(1+i)^2 = 2i$. Значит, b делится на 2, а b^3 — на 8. Но тогда a^2 будет иметь остаток 7 при делении на 8, так как $a^2 + 1 = b^3$. А значит, остаток 3 при делении на 4. А, как мы выяснили на предыдущей лекции, таких квадратов не существует. При делении на 4 квадрат дает в остатке либо 1, либо 0. Поэтому такого быть не может.

Значит, ни одного общего делителя у чисел $(a+i)$ и $(a-i)$ нет. Их произведение является поэтому кубом некоторого гауссова числа. Согласно основной теореме арифметики, из этого следует, что каждое из них само является кубом гауссова числа (снова с точностью до умножения на обратимый элемент $1, i, -1$ или i). Но все они тоже кубы, так что сформулированное утверждение верно в точности: скажем, $a+i=(m+ni)^3$.

Вдумайтесь, что мы сделали. Мы взяли обычное уравнение в целых числах. Зачем-то перешли в гауссовы числа и внутри гауссовых чисел разложили левую часть на множители. После чего, живя внутри гауссовых чисел, мы сказали, что тогда

$$a+i=(m+ni)^3.$$

При этом a — целое **не гауссово** число. Гауссово число $(a+i)$ живет на один шаг выше оси x.

Это число должно быть равно кубу некоторого гауссова числа.

Теперь вспомним формулу куба суммы и раскроем скобки:

$$a+i=(m+ni)^3=m^3+3m^2ni-3mn^2-n^3i= \\ =(m^3-3mn^2)+i(3m^2n-n^3).$$

Комплексные числа равны, значит равны их вещественная и мнимая части:

$$a=m^3-3mn^2, \quad 1=3m^2n-n^3.$$

Я вернулся из гауссовых чисел в обычные целые числа. С помощью гауссовых чисел я сделал вывод, который никогда в жизни не сделал бы без них. Из $a^2=b^3-1$ я получил, что

$$3m^2n-n^3=1.$$

Теперь уже всё просто:

$$3m^2n-n^3=1, \quad n(3m^2-n^2)=1,$$

n и $3m^2 - n^2$ — целые числа. Два числа дают в произведении 1 тогда и только тогда, когда они одновременно равны 1 или -1.

$$n = \pm 1, \quad 3m^2 - n^2 = \pm 1.$$

Вы заметили, «единицу можно разложить на множители *единственным* способом: либо 1 умножить на 1, либо -1 умножить на -1». Второй способ **неотличим от первого**, так как второе решение можно сократить на «обратимое число» (-1). Так что второй случай кажется ненужным для рассмотрения — вроде как получается избыточная аргументация. Но, как будет видно ниже, второй случай отнюдь не лишний.

Мой учитель Саша Шень рассказывал замечательную историю про то, как он стал математиком «из-за избыточной аргументации». Ему подали рыбу, филе (я сам очень долго, лет до 30, думал, что филе — это название рыбы). Так вот. Ему подали филе, и он сказал: «Мама, ну тут кости! Ты можешь вынуть кости?» А мама применила следующий замечательный логический прием, поставив его на дорогу математика. Она сказала: «Так! Саша, во-первых, это филе, и костей в нём быть не может. А во-вторых, где ты видел рыбу без костей?» Саша настолько был потрясен такой «железобетонной» логикой, что после этого стал математиком.

Итак, разберем наши два случая. Хотя они одинаковы с точки зрения единственности разложения на множители, но они не одинаковы с точки зрения наличия решений!

Первый случай: $n = 1$, $3m^2 - n^2 = 1$, следовательно, $3m^2 = 2$. Но m — целое число. Значит, такого быть не может.

Второй случай: $n = -1$, $3m^2 - n^2 = -1$, следовательно, $3m^2 = 0$. Получаем $m = 0$.

$$a + i = (m + ni)^3 = (0 - i)^3 = (-i)^3 = i.$$

Так как $a + i = i$, то $a = 0$. Но $b^3 = a^2 + 1$, значит, $b = 1$.

Это — единственное решение исходного уравнения. Получается, что кроме тривиальных решений, других решений уравнения $a^2 = b^3 - 1$ **нет**.

Из этой теории можно сделать следующий практический вывод. Если у вас с ребенком вышла такая ситуация, что он сложил из кубиков большой куб, вы украли у него кубик, и он сложит квадрат, значит, что-то не так. Значит, он кубик «украл обратно» (и их было 729 скорее всего!). Вы можете сказать: «Так, ты похитил у меня кубик!»

— Как, папа? Как ты это увидел? Ты, наверное, ясновидящий...

— Нет. Я просто умею решать диофантовы уравнения, сынок.